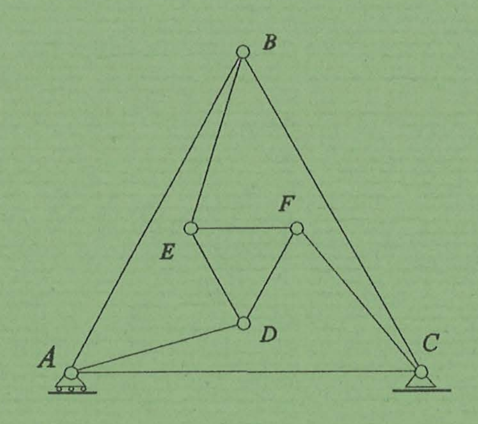
APUNTES DE

MECÁNICA DEL SÓLIDO

por

ISABEL MÁS ROBLEDO

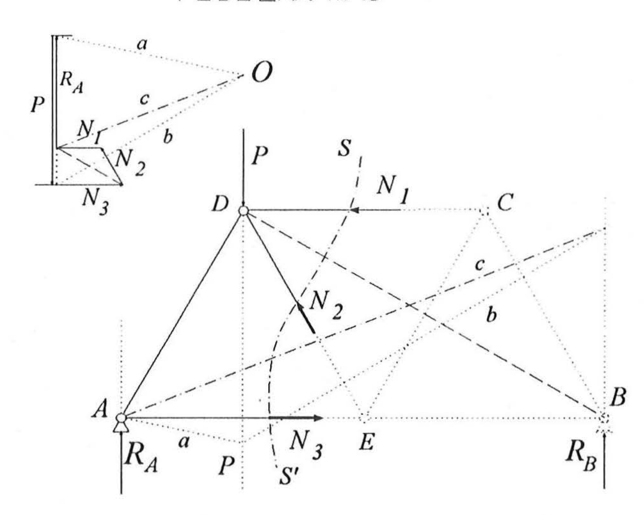
DESARROLLADOS SOBRE
LAS LECCIONES TEÓRICAS IMPARTIDAS POR EL
CATEDRÁTICO FÉLIX SORIANO SANTANDREU



CUADERNOS DE *APOYO A LA DOCENCIA* DEL
INSTITUTO JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

FE DE ERRATAS

pág.30 fig. 16.38



pág.33 línea 16

$$-\vec{N} + \vec{N} + d\vec{N} + d\vec{F} = \vec{0}$$

pág.33 línea 25

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dT}{ds}\vec{t} + T\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{dT}{ds}\vec{t} + T\frac{\frac{1}{\rho}ds}{ds}\vec{n} = \frac{dT}{ds}\vec{t} + \frac{T}{\rho}\vec{n}$$

pág.33 línea 26

... al desplazarse el extremo del unitario $\vec{t}$ ...

pág.34 párrafo b)

Si la fuerza es constantemente paralela a una dirección fija $\vec{u}$, podremos escribir $\vec{u} \times \vec{f}\,ds = 0$ así que multiplicando la ecuación de equilibrio del hilo $d\vec{T} + \vec{f}\,ds = \vec{0}$ vectorialmente por $\vec{u}$, al anularse el 2º término quedará, como en el caso anterior, $\vec{u} \times d\vec{T} = \vec{0}$ y análogamente $d(\vec{u} \times \vec{T}) = \vec{u} \times d\vec{T} + d\vec{u} \times \vec{T} = \vec{u} \times d\vec{T} = \vec{0}$ al no variar el unitario de la dirección fija, lo que indica que el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{T} = \vec{c}$ es un vector constante perpendicular al plano formado por $\vec{u}$ y $\vec{T}$ o, lo que es lo mismo a $d\vec{r}$ y, en consecuencia al elemento de curva ds y a la dirección fija, por lo que la **CURVA QUE ADOPTARÁ EL HILO SERÁ PLANA**.

pág.35 línea 19

... vendrá expresada por la función vectorial $d\vec{F} = -p\,ds\,\vec{k}$

pág.36 línea 11

$$\boxed{T_o = p\,a} \qquad \boxed{T_z = p\,s} \qquad \boxed{T = p\,z}$$

pág.36 línea 21

$$T_B - T_A = V_B - V_A = p\,h_B - p\,h_A = p(h_B - h_A) = p\,h$$

pág.37 línea 3

Para eliminar la constante de integración, teniendo en cuenta que $z' = \frac{dz}{dx}$

APUNTES DE

MECÁNICA DEL SÓLIDO

por

ISABEL MÁS ROBLEDO

DESARROLLADOS SOBRE
LAS LECCIONES TEÓRICAS IMPARTIDAS POR EL
CATEDRÁTICO FÉLIX SORIANO SANTANDREU

CUADERNOS DE *APOYO A LA DOCENCIA* DEL
INSTITUTO JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

Cuaderno 25
ISBN: 84-89977-28-3
Depósito Legal: M-20014-1998

Apuntes de

Mecánica del Sólido

Mecánica del Sólido Rígido

Esfuerzos en Elementos Lineales

MECÁNICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

15.1 GENERALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA MECÁNICA

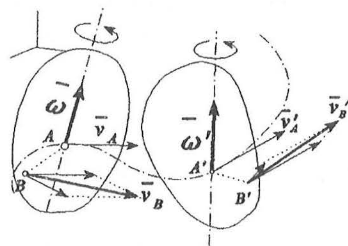


Figura 15.2

Como ya sabemos, el sólido rígido no es otra cosa que un ***sistema material continuo*** que, aún ocupando un volumen finito, puede considerarse constituido por innumerables partículas de masa diferencial cuya distancia a las partículas contiguas será tan pequeña como se quiera pero siempre constante, de forma que pueda ser considerado como ***rígido e indeformable*** siéndole de aplicación la teoría de vectores deslizantes desarrollada en Cinemática por la que reducíamos el movimiento a una traslación y una rotación instantáneas aplicadas al punto A de reducción $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{BA} \times \vec{\omega}$.

Y para evitar la complejidad en las expresiones de los Teoremas de la Mecánica podemos elegir, como hemos visto para sistemas materiales, entre:

- reducir el movimiento a puntos de velocidad nula $\vec{V}_A = 0$ que en el sólido rígido se reducen a ***puntos materiales fijos*** y ***centros instantáneos de rotación***[1] aunque éstos últimos con la reserva de que además se anule o se tenga en cuenta al menos el producto vectorial $\vec{\rho}_c \times \vec{a}_I$, donde $\vec{\rho}_c$ será el vector de posición del centro de masas del sólido respecto al centro instantáneo de rotación:

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \quad ,, \quad \vec{M}_I = \frac{d\vec{\sigma}_I}{dt} + \vec{\rho}_C \times M\,\vec{a}_I \qquad [15.1]$$

- o reducirlo a ***los centros de masas***, con los que se da otra ventaja adicional ya que podemos realizar los cálculos con el movimiento absoluto o con el relativo de rotación alrededor del eje aplicado en C y el de arrastre del propio centro cuando sea necesario:

$$\vec{M}_C = \frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}_C^{(r}}{dt} \quad ,, \quad E_c = E_c^r + \frac{1}{2} M\, v_c^2 \qquad [15.2]$$

Ahora bien, como se van a tener en cuenta, por lo general, las fuerzas de la gravedad, lo adecuado será considerar su resultante aplicada en el centro de vectores paralelos aplicados correspondiente; es decir, el peso total en su ***centro de gravedad*** que, por coincidir en el ámbito de nuestro estudio con el ***centro de masas***, cambiará la denominación de los Teoremas desarrollados para aquél, en particular el del movimiento $\sum\vec{F} = M\vec{a}_G$.

Obviamente en ausencia de gravedad, o cuando su valor pudiera considerase despreciable en comparación con las restantes fuerzas, no tendría mucho sentido tal denominación, aunque no se incurriría en error ya que para las dimensiones usuales del sólido $\vec{r}_C = \vec{r}_G$[2]. Sin embargo sí sería erróneo considerar, solo por el hecho de ser $\vec{P} = M\vec{g}$ que $\vec{a}_G = \vec{g}$ salvo que se tratara de la única fuerza actuante sobre el sólido (caída libre[3]), en cuyo caso más que una igualdad se trataría en realidad de la identidad causa-efecto, premisa fundamental en la que se basa la Mecánica.

---

(1) *ya que, en cualquier caso, si la velocidad mínima (de deslizamiento) tiene que ser nula o nos encontramos ante una traslación única, ante una rotación en torno a un eje (de dirección cte o variable) con un punto fijo o ante un movimiento paralelo a un plano cuya intersección con el eje instantáneo de rotación es el c.i.r.*

(2) *No podríamos decir lo mismo con sistemas discretos cuando la distancia entre partículas fuese tan grande que se tratara de vectores no paralelos por encontrarse a distinta latitud o longitud en la superficie terrestre, o el valor de g fuera distinto por encontrarse a distinta altitud.*

(3) *De ahí que tienda a denominarse el vector intensidad del campo gravitatorio $\vec{g}$ -erróneamente- aceleración de la gravedad.*

El movimiento del sólido rígido vendrá por tanto definido mediante la TRASLACIÓN del centro de gravedad y la ROTACIÓN simultánea alrededor de un eje aplicado en aquél. La traslación se obtendrá del Teorema de la CANTIDAD DE MOVIMIENTO DEL C.D.G. $\Sigma\vec{F} = M\vec{a}_G$. Al movimiento relativo de rotación se llegará a partir del Teorema del MOMENTO CINÉTICO o del de la ENERGÍA CINÉTICA generalizando las expresiones obtenidas para un sistema discreto entre cuyas partículas la distancia no va a variar.

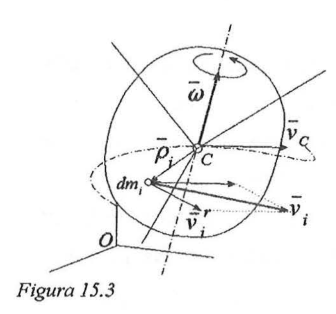


Figura 15.3

Así, por ejemplo, si $v_c \neq 0$, la velocidad absoluta de un elemento dm_i del sólido será $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ pero la relativa sería únicamente $\vec{v}_i^{\,r} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$ y como $\vec{\sigma}_c = \vec{\sigma}_c^{\,r} = \sum_{\Delta v \to 0} \vec{\rho}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i^{\,r} = \int_v \vec{\rho}_i \times dm_i \vec{v}_i^{\,r}$, generalizando podremos escribir:

$$\vec{\sigma}_c^{\,r} = \Sigma\,\vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i^{\,r} = \Sigma\,\vec{\rho}_i \times m_i(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i) = \Sigma\, m_i\left[\vec{\rho}_i \times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i)\right] = \Sigma\, m_i\left[\vec{\omega}(\vec{\rho}_i\cdot\vec{\rho}_i) - \vec{\rho}_i(\vec{\rho}_i\cdot\vec{\omega})\right]$$

y eligiendo unos ejes solidarios con origen en C, respecto a los cuales sea $\vec{\rho}_i = x_{ij}\vec{u}_j$ y $\vec{\omega} = \omega_j \vec{u}_j$ quedará:

$$\vec{\sigma}_c^{\,r} = \Sigma\, m_i \rho_i^2\, \vec{\omega} - \Sigma\, m_i x_{ij}\omega_j\, \vec{\rho}_i = \Sigma\, m_i\,(x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2)\,\vec{\omega} - \Sigma\, m_i\,(x_{i1}\omega_1 + x_{i2}\omega_2 + x_{i3}\omega_3)\,\vec{\rho}_i =$$

$$= \Sigma\, m_i\,(x_{i1}^2 + x_{i2}^2 + x_{i3}^2)(\omega_1\vec{u}_1 + \omega_2\vec{u}_2 + \omega_3\vec{u}_3) - \Sigma\, m_i(x_{i1}\omega_1 + x_{i2}\omega_2 + x_{i3}\omega_3)(x_{j1}\vec{u}_1 + x_{j2}\vec{u}_2 + x_{j3}\vec{u}_3) =$$

$$= \Sigma\, m_i \begin{Vmatrix} x_{i1}^2+x_{i2}^2+x_{i3}^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_{i1}^2+x_{i2}^2+x_{i3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_{i1}^2+x_{i2}^2+x_{i3}^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} - \Sigma\, m_i \begin{Vmatrix} x_{i1}^2 & -x_{i1}x_{i2} & -x_{i1}x_{i3} \\ -x_{i2}x_{i1} & x_{i2}^2 & -x_{i2}x_{i3} \\ -x_{i3}x_{i1} & -x_{i3}x_{i2} & x_{i3}^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \Sigma m_i(x_{i2}^2+x_{i3}^2) & -\Sigma m_i x_{i1}x_{i2} & -\Sigma m_i x_{i1}x_{i3} \\ \Sigma m_i x_{i2}x_{i1} & \Sigma m_i(x_{i1}^2+x_{i3}^2) & -\Sigma m_i x_{i2}x_{i3} \\ -\Sigma m_i x_{i3}x_{i1} & -\Sigma m_i x_{i3}x_{i2} & \Sigma m_i(x_{i1}^2+x_{i2}^2) \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{vmatrix} = \bar{\bar{I}}_C \cdot \vec{\omega}$$

donde entran en juego unos términos que en el Tema *de **Geometría de Masas*** denominamos respectivamente ***momentos de inercia*** $I_{ii} = \int dm\,(x_j^2 + x_k^2)\ _{(i\neq j,k)}$ y ***productos de inercia*** $-I_{jk} = \int dm\, x_j x_k\ _{(j\neq k)}$ del sistema material en un punto concreto y respecto a unos ejes definidos y que podemos agrupar constituyendo el ***Tensor de Inercia*** de forma que la expresión reducida del Teorema del Momento Cinético respecto al centro de gravedad quedará:

$$\vec{M}_G = \frac{d}{dt}\left[\bar{\bar{I}}_G \cdot \vec{\omega}\right] \qquad \textit{[15.3]}$$

y análogamente, la energía cinética del movimiento relativo (rotación) al c.d.g., se expresará:

$$E_c^G = \Sigma\,\frac{1}{2} m_i |v_i^{\,r}|^2 = \Sigma\,\frac{1}{2} m_i [\vec{v}_i^{\,r}\cdot\vec{v}_i^{\,r}] = \Sigma\,\frac{1}{2} m_i [(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i)\cdot\vec{v}_i^{\,r}] = \Sigma\,\frac{1}{2} m_i \vec{\omega}\cdot[\vec{\rho}_i\times\vec{v}_i^{\,r}] =$$

$$= \Sigma\,\frac{1}{2} m_i \vec{\omega}\cdot[\vec{\rho}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_i)] = \Sigma\,\frac{1}{2} m_i \vec{\omega}\cdot[(\vec{\rho}_i\cdot\vec{\rho}_i)\,\vec{\omega} - (\vec{\rho}_i\cdot\vec{\omega})\,\vec{\rho}_i] = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}_G\cdot\vec{\omega}$$

término que comparado con el momento de inercia de un sistema material respecto a una recta que pase por el origen de referencia nos permitirá escribir:

$$E_c^G = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}_G\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\omega^2\left[\vec{\epsilon}\cdot\bar{\bar{I}}_G\cdot\vec{\epsilon}\right] = \frac{1}{2}\omega^2 I_\epsilon$$

con lo que el ***TEOREMA DE KÖNING*** que expresa la Energía cinética del sólido o sistema rígido como la energía cinética ***de traslación*** que tendría toda la masa del sistema supuesta concentrada en el c.d.g. más la ***de rotación*** en torno al eje de giro pasando por aquél quedará:

$$E_c = \frac{1}{2} I_\epsilon\, \omega^2 + \frac{1}{2} M V_G^2 \qquad [15.4]$$

15.2 TRABAJO DE LAS FUERZAS INTERIORES. NULIDAD SISTEMÁTICA.

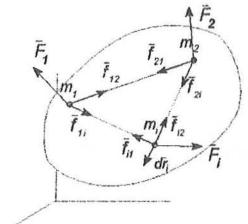


Figura 15.4

Ahora bien, el Teorema de la Energía lo que expresa es la igualdad entre el trabajo elemental realizado por las fuerzas aplicadas en cada partícula con la variación de su energía cinética, por lo que haciendo trabajar nuestro sistema a partir de un desplazamiento real (ya que no tendría sentido hablar de velocidad virtual) $d\vec{r}_i$ de cualquiera de sus partículas m_i, el trabajo total del sistema será la suma de todos los trabajos elementales realizados por las fuerzas actuantes sobre ellas:

$$d\mathscr{E} = \Sigma\left[\vec{F}_i + \vec{f}_{ij}\right]\cdot d\vec{r}_i = \Sigma m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = \Sigma m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\cdot d\vec{r}_i = \Sigma m_i d\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \Sigma m_i d\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i = \Sigma m_i v_i\, dv_i = d\left[\Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2\right] = dE_c$$

Es decir, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores más el realizado por las fuerzas interiores equivale a la variación de energía cinética del sistema material definida como suma de las energías cinéticas de todos los puntos del sistema, lo que constituye el TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA del Sistema Material: $d\mathscr{E}_{ext} + d\mathscr{E}_{int} = dE_c$.

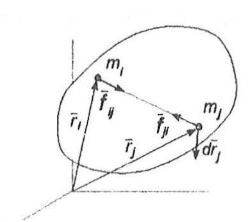


Figura 15.5

Sin embargo, el problema se simplifica considerablemente ***en el sólido rígido*** al poder prescindir del segundo término, ya que ***el trabajo de las fuerzas interiores*** $\vec{f}_{ij}$ es ***sistemáticamente nulo*** al ser invariable la distancia entre partículas; es decir $d\rho_{ij} = 0$ al tratarse de un sistema material rígido e indeformable, por lo que podemos asegurar que el trabajo de las fuerzas interiores es nulo, como se deduce de su expresión:

$$d\mathscr{E}_{int} = \vec{f}_{ij}\cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{ji}\cdot d\vec{r}_j = \vec{f}_{ij}\cdot d\vec{r}_i - \vec{f}_{ij}\cdot d\vec{r}_j = \vec{f}_{ij}\cdot(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \vec{f}_{ij}\cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{f}_{ij}\cdot d\vec{\rho}_{ij} = -f_{ij}\, d\rho_{ij} = 0$$

igualándose la variación de energía cinética exclusivamente al trabajo elemental de las fuerzas exteriores:

$$d\mathscr{E} = d\mathscr{E}^{ext} = dE_c \qquad [15.7]$$

lo que, sin duda, va a resultar de gran utilidad aunque, como última aproximación a los sólidos reales necesitamos también introducir el concepto de RESISTENCIAS PASIVAS - *que estudiaremos más adelante*- para tener en cuenta el trabajo negativo que éstas pueden llegar a realizar.

15.3 EXPRESIONES PARA EL MOVIMIENTO PLANO

Dado que en el ámbito de nuestro estudio nos limitaremos, en general, al movimiento plano, el problema del sólido se simplificará considerablemente ya que la rotación $\vec{\omega} = \omega\,\vec{\epsilon}$ se considerará invariable en dirección y, por tanto, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec{\epsilon} = \alpha\vec{\epsilon}$. Por otro lado, como las velocidades de todos los puntos del sólido han de ser paralelas a un plano fijo según veíamos en cinemática, al estudiar una sección plana paralela a dicho plano veríamos que el momento cinético respecto a cualquier punto fijo del plano ($\vec{\sigma}_o = \Sigma\,\vec{r}_i \times m\vec{v}_i$) sería siempre perpendicular a él por tratarse de vectores coplanarios y por tanto $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} \parallel \vec{\sigma}_o$.

Como en ese caso el momento de las fuerzas respecto al punto fijo ha de ser $\vec{M}_o = \frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} \Rightarrow \vec{M}_o \parallel \vec{\sigma}_o$ o dicho de otro modo, el momento de las fuerzas que actúan sobre el sólido no podrá tener componente sobre el plano ya que lo haría girar según una dirección contenida en él haciéndolo pivotar. Por tanto, como el momento solo podrá tener componente normal al plano del movimiento, lo único que necesitamos conocer es su módulo -coincidente con el momento áxico- y la expresión del Teorema del MOMENTO CINÉTICO también se simplificará al multiplicar ambos miembros por el unitario correspondiente, resultando, en general:

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}_A \times M\vec{V}_G \Rightarrow \vec{M}_A \cdot \vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} \cdot \vec{\epsilon} + (\vec{V}_A \times M\vec{V}_G) \cdot \vec{\epsilon} \Rightarrow M_A = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_A \cdot \vec{\epsilon}) + (\vec{V}_A \times M\vec{V}_G) \cdot \vec{\epsilon}$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{d\sigma_A}{dt} + (\vec{V}_A \times M\vec{V}_G) \cdot \vec{\epsilon}$$

y si hemos elegido el punto de reducción A de forma que el segundo término sea nulo (por ejemplo un punto fijo, el centro de gravedad o el centro instantáneo de rotación) quedará:

$$M_A = \frac{d\sigma_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_A \cdot \vec{\epsilon}) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\epsilon} \cdot \bar{\bar{I}}_A \cdot \vec{\omega}\right] = \frac{d}{dt}\left[\omega(\vec{\epsilon} \cdot \bar{\bar{I}}_A \cdot \vec{\epsilon})\right] = \frac{d}{dt}\left[\omega \; I_A\right] \qquad [15.8]$$

donde I_A lo entenderemos como el momento de inercia respecto al punto A, aunque en realidad se trate del momento respecto a un eje (el de giro del sólido reducido a dicho punto) perpendicular al plano del movimiento.

Si el punto elegido no es el c.d.g., por Steiner veríamos que $I_A = I_G + M\,\overline{AG}^2$, por lo que la expresión anterior solo nos sería realmente útil si $I_A = cte$ para que no le afectase la derivada y poder resumir la ***ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA DE ROTACIÓN*** a:

$$M_\epsilon = I_\epsilon\, \alpha \qquad [15.9]$$

quedando por tanto los puntos anteriormente indicados restringidos exclusivamente a los que cumplan dicha condición:

- ***Un punto O fijo del propio sólido respecto al cual gire con movimiento plano según*** $M_O = I_O\,\alpha$
- ***El propio c.d.g., sea fijo o no, en cuyo caso*** $\vec{v}_G$ ***será la traslación impuesta al sólido y*** $M_G = I_G\,\alpha$
- ***El c.i.r. solo cuando se mantenga a distancia constante del c.d.g. (trayectorias paralelas) y*** $M_I = I_I\,\alpha$

La expresión de la ENERGÍA CINÉTICA por el Teorema de Köning no presentará variaciones ya que directamente habremos obtenido un valor escalar donde $I_\epsilon = I_G$ si estamos reduciendo el movimiento al centro de gravedad:

$$E_c = \frac{1}{2} I_G\, \omega^2 + \frac{1}{2} M V_G^2 \qquad [15.10]$$

que interpretaremos como ***la energía cinética de Traslación del c.d.g. más la energía cinética de rotación en torno al eje de giro aplicado en G***, o bien, si directamente referimos el movimiento al centro instantáneo de rotación, en la expresión aparecerá $I_\epsilon = I_I$, en cuyo caso, obviamente:

$$E_c = \frac{1}{2} I_I\, \omega^2 \qquad [15.11]$$

ya que tendremos el movimiento absoluto de las partículas y no necesita término adicional.

15.4 GRADOS DE LIBERTAD DEL SÓLIDO RÍGIDO. CONDICIÓN DE EQUILIBRIO.

Si en el sólido rígido fijamos uno de los puntos, por ejemplo su c.d.m. o c.d.g. -respecto al que pueden reducirse fácilmente los teoremas de la Mecánica- le habremos eliminado tres grados de libertad (x_C, y_C, z_C), pero de la ecuación $\vec{V}_P = \vec{V}_C + \vec{PC} \times \vec{\Omega}$ se deduce que podrá seguir moviéndose aunque $\vec{V}_C = \vec{0}$ mediante un giro $\vec{\Omega}$ respecto al eje aplicado en G, lo que supone otros tres grados de libertad. Eso indica que el sólido rígido tiene en total 6 grados de libertad y necesitamos 6 ecuaciones para resolver las 6 incógnitas que plantea su anulación en el equilibrio estricto (isostático) ya sea conociendo el valor de los parámetros libres correspondientes o el de las reacciones introducidas por algún tipo de vinculación o ligadura con el exterior. Tres de esas ecuaciones las obtenemos de la expresión que define la **NO TRASLACIÓN** del c.d.m. $\Sigma \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_c = \vec{0} \Rightarrow \Sigma F_x = 0; \ \Sigma F_y = 0; \ \Sigma F_z = 0$. Para que además el sólido **NO GIRE**, bastará que el momento resultante de las fuerzas exteriores se anule $\Sigma \vec{M}_i = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$, proporcionándonos las otras 3 ecuaciones necesarias para su definición $\Rightarrow \Sigma M_x = 0; \ \Sigma M_y = 0; \ \Sigma M_z = 0$.

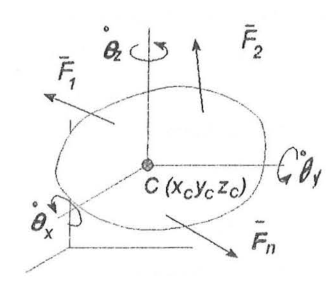


Figura 15.6

Al igual que para los sistemas discretos, ***solamente*** si se trata de sólidos rígidos (no deformables) podremos afirmar que es condición ***NECESARIA Y SUFICIENTE*** para el equilibrio que el sistema de las fuerzas exteriores, incluidas las de reacción, constituya un sistema idénticamente nulo ya que en tal caso cualquier fuerza aplicada en un punto exterior del sólido se va transmitiendo por el principio de acción y reacción a través de todos los puntos interiores que se encuentran en la recta de acción de dicha fuerza sin modificar su efecto por la indeformabilidad de aquel, pudiendo por tanto considerarse como deslizantes, aunque a todos los efectos no podamos olvidar que son aplicados.

15.5 LIGADURAS Y EQUIVALENTES MECÁNICOS.

Admitiendo, por tanto, con las reservas oportunas, la hipótesis de sólido rígido e indeformable, veremos a continuación cómo puede perder normalmente sus seis grados de libertad inicial, es decir, cuáles son los tipos más notables de ligaduras que nos vamos a encontrar y los equivalentes mecánicos en que se pueden traducir.

APOYO por un punto cualquiera del sólido, que puede ser o no siempre el mismo, es un tipo de ligadura simple que no opone ninguna resistencia al giro provocado por los momentos de las fuerzas y limita la traslación del sólido exclusivamente en una dirección, permitiendo el desplazamiento o deslizamiento en cualesquiera direcciones de las contenidas en el plano normal a dicha dirección. Implica, por tanto, 1 coacción que se traduce en una incógnita de reacción N. Grados de libertad del sólido = 6 - 1 = 5 = parámetros por definir.

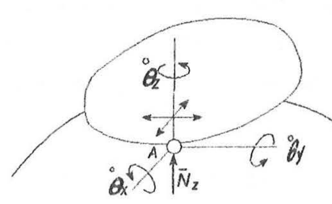


Figura 15.7

APOYO SOBRE UNA SUPERFICIE

Dado que el único impedimento de una superficie lisa es atravesarla, resulta obvio que la dirección de la reacción ha de ser la normal a dicha superficie o, lo que es lo mismo, al plano tangente común a la superficie y al sólido en el punto de contacto. Aunque su obtención es inmediata, para el caso de una superficie plana o esférica podrá recurrirse, en general, a la dirección del gradiente de la superficie en el punto de contacto.

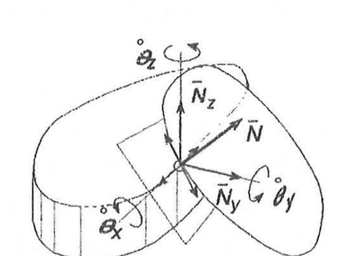


Figura 15.8

APOYO SOBRE UNA LÍNEA

Si consideramos la línea como intersección de 2 superficies, la reacción podrá obtenerse como suma de dos vectores N_1 y N_2, normales a cada una de las superficies que, en el caso más general, no tendrán por qué ser ortogonales entre sí. En cualquier caso el sólido puede seguir deslizando según cualquier dirección de las del plano tangente común por el punto de contacto y la resultante tendrá una dirección bien definida por la normal a dicho plano, lo que facilita su resolución.

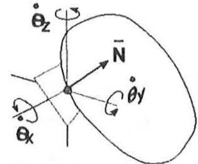


Figura 15.9

APOYO SOBRE UN PUNTO

Análogamente, obtendremos la reacción según la dirección de la normal al plano tangente a la superficie el sólido por el punto de apoyo, lo que significa como en casos anteriores la eliminación, exclusivamente, de un grado de libertad.

ARTICULACIÓN es un tipo de ligadura que, permitiendo al menos uno de los giros posibles del sólido, impide total o parcialmente su traslación vinculando siempre, a diferencia del apoyo, ***al mismo punto*** del sólido, lo que la caracteriza por el desconocimiento a priori de la dirección de la reacción $\vec{R}$, que vendrá dada en cualquier caso de anular cualquier posibilidad de traslación $\vec{R} = -\Sigma\vec{F} = \vec{0}$.

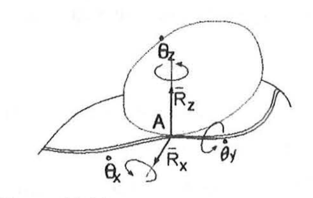


Figura 15.10



ARTICULACIÓN MÓVIL o GUÍA o PASADOR

No limita (en principio) ninguno de los giros y permite la traslación del sólido, pero condicionada a no abandonar una determinada trayectoria (plana o alabeada) anulando así 2 de los 6 grados de libertad lo que se traduce en el mismo número de incógnitas, (por ej. R_x R_z). y en 6 - 2 = 4 Parámetros para su completa definición.

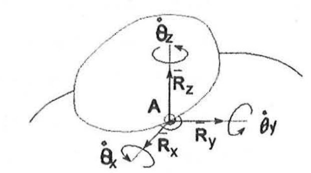


Figura 15.11

ARTICULACIÓN ESFÉRICA o APOYO FIJO

Permite el giro en cualquier dirección manteniendo, por tanto, 6 - 3 = 3 Grados de libertad, pero anula cualquier posibilidad de traslación originando las tres incógnitas correspondientes de reacción: R_x R_y y R_z.

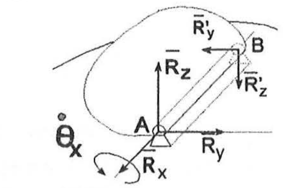


Figura 15.12

ARTICULACIÓN CILÍNDRICA

permitirá el giro exclusivamente en una dirección. Implica por tanto 6 - 5 = 1 grado de libertad y las nuevas coacciones, por implicar impedimento al giro, se traducirán en momentos de empotramiento M_y y M_z en A o en reacciones R'_y, R'_z equivalentes en otro punto B. Pero este tipo de articulaciones suele conllevar una distribución plana de fuerzas (y movimiento plano) con lo que R_x=0 y M_y=M_z=0.

EMPOTRAMIENTO Este vínculo, de 6º orden, es el único que basta por sí solo para eliminar todos los grados de libertad del sólido rígido. A cambio conlleva 6 incógnitas de reacción: R_x R_y R_z y M_x, M_y, M_z que se resolverán con las 6 ecuaciones del equilibrio. Nos encontramos por tanto ante el ejemplo más inmediato de equilibrio estricto independientemente del sistema de fuerzas aplicado.

En este sentido diremos que si las ligaduras a que está sometido un sólido son las estrictamente necesarias para inmovilizarlo, igualándose el nº de coacciones a los 6 grados de libertad del sólido libre, nos encontramos ante un sólido en EQUILIBRIO ISOSTÁTICO, caracterizado por que se da siempre independientemente del sistema de fuerzas aplicadas en él pudiéndose resolver todas las incógnitas de reacción.

No ocurre lo mismo cuando el sólido tiene más ligaduras de las estrictamente necesarias para alcanzar el equilibrio, denominándose en tal caso EQUILIBRIO HIPERESTÁTICO, ya que tendremos más incógnitas que ecuaciones y por tanto el problema no se podrá resolver. Por el contrario, con las vinculaciones que dejan al sólido alguna posibilidad de movimiento, aunque siempre pueda determinarse al menos una CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO para cada sistema de fuerzas aplicadas en función de los parámetros que determinan su grado de libertad, no implica que tenga que darse el equilibrio con otro sistema de fuerzas para la misma configuración. Puede ocurrir, sin embargo, que las ligaduras impuestas representen tantas coacciones como grados de libertad (o más) pero no limiten las posibilidades de movimiento en su totalidad. Por ejemplo, un sólido en el espacio (6 grados de libertad) con dos articulaciones esféricas implica 6 coacciones y por tanto 6 incógnitas de reacción pero conserva un grado de libertad ya que puede girar todavía respecto al eje que forman las dos articulaciones, lo que significa un parámetro aún por determinar.

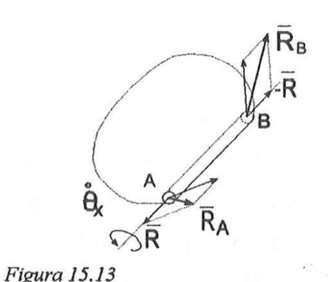


Figura 15.13

En este caso, aún pudiéndose determinar la configuración de equilibrio con la ecuación de momentos respecto a dicho eje, resulta imposible resolver las otras 6 incógnitas de reacción con las 5 ecuaciones restantes, por lo que el problema no tiene solución. O mejor dicho, existirán infinitas soluciones para las reacciones en las articulaciones A y B como podemos constatar al introducir en el sistema un par de fuerzas iguales y opuestas sobre la misma recta de acción AB que no producen movimiento al no dar momento pero modifican su valor.

En resumen, mediante las ecuaciones de la Estática podemos resolver todas las incógnitas de vinculación isostática que plantea cada sistema de fuerzas aplicado en un sólido rígido así como la configuración de equilibrio ante un determinado sistema de fuerzas de cualquier mecanismo aunque plantee hiperestatismo de vinculación, pero en este caso no podremos resolver nunca todas las incógnitas de reacción por no existir una sola solución.

En el CASO DEL SÓLIDO O SECCIÓN PLANA, vemos que el nº máximo de grados de libertad es 3 ya que solo podrá realizar un giro en torno a un eje perpendicular al plano y trasladarse según unos ejes x, y contenidos en aquel.

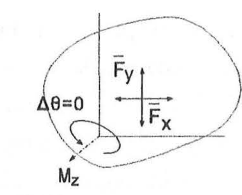
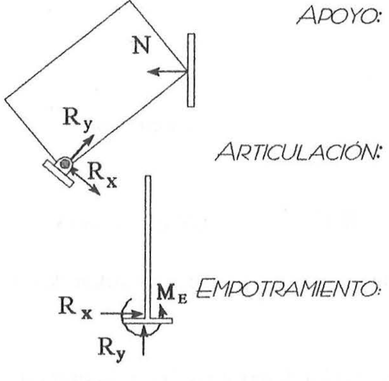


Figura 15.14

Análogamente solo dispondrá de tres ecuaciones para determinar las incógnitas o los parámetros determinantes de la configuración de equilibrio, ya que no podrá estar sometido a fuerzas que no estén contenidas en el plano del sólido:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0} \Rightarrow \begin{matrix}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{matrix} \qquad \Sigma\vec{M}=\vec{0} \Rightarrow \Sigma M_z=0$$

lo que significa que no podrá tener más de tres incógnitas de vinculación para resolver el problema mediante las ecuaciones de la Estática. En este sentido, a los tipos de vinculación analizados tendremos que reducir las limitaciones al movimiento que pudieran implicar salirse del plano, por lo que podemos resumir los vínculos a tres:



APOYO: Se elimina un grado de libertad al impedir un desplazamiento. Origina una reacción normal a la línea de apoyo y requiere determinar los dos parámetros libres para alcanzar la configuración de equilibrio.

ARTICULACIÓN: impide el desplazamiento pero no el giro: es decir, mantiene un grado de libertad y significa dos incógnitas vinculares por resolver y un parámetro a fijar para determinar la configuración de equilibrio ante un sistema determinado de fuerzas.

EMPOTRAMIENTO: Impide todo movimiento, tanto de traslación como de giro, del sólido vinculado que puede considerarse por sí solo en equilibrio isostático independientemente del sistema de fuerzas aplicado; pero implica tres incógnitas de reacción: dos fuerzas y un momento de empotramiento

Figura 15.15

En consecuencia, un sólido plano con un solo apoyo será un mecanismo con 2 grados de libertad y una incógnita de reacción. Si cuenta con una sola articulación será también un mecanismo con dos incógnitas y 1 grado de libertad, al igual que un sólido biapoyado que, sin embargo, podrá permanecer en equilibrio siempre que no esté sometido a fuerzas en la dirección de la recta de apoyo.

Estará en equilibrio isostático, es decir, independientemente de las fuerzas actuantes, un sólido apoyado-articulado al igual que un sólido empotrado ya que dichos vínculos no dejan ningún grado de libertad y representan 3 coacciones, planteando 3 incógnitas de reacción resolubles mediante las ecuaciones de la estática. Pero no se podrán resolver sus incógnitas de reacción aunque siempre estará en equilibrio, un sólido biarticulado o empotrado-apoyado, empotrado-articulado o biempotrado, sólidos con un hiperestatismo respectivamente de grado 1, 2 y 3.

15.6 EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE SÓLIDOS.

En general, de un sistema de sólidos vinculados entre sí, como ocurre para cualquier sistema material, podrá decirse que está en equilibrio cuando su estado no se modifique con el tiempo; es decir, cuando no se deforme y permanezca en reposo respecto de un marco inercial, siendo lícito admitir que no se precisa modificar el sistema de fuerzas que da lugar al equilibrio para que se conserve, aún cuando todos los grados de libertad internos al sistema hayan desaparecido al fijarse los parámetros correspondientes, lo que equivale a suponer que el sistema, o parte del mismo, se ha solidificado (Principio de Solidificación) siendo posible trabajar entonces con el sistema como si fuera un único sólido y admitir como condición necesaria para el equilibrio que el sistema de fuerzas exteriores (de acción y reacción) constituya un sistema idénticamente nulo, es decir, $\Sigma\ \vec{F}^{\ (ext} = \vec{0}$ y $\Sigma\ \vec{M}^{\ (\vec{F}_{ext}} = \vec{0}$. Sin embargo esta condición aunque necesaria puede no ser suficiente, como veíamos con los sistemas materiales, si los vínculos entre sólidos admiten alguna deformación, por lo que la única condición realmente suficiente para el equilibrio de un sistema de sólidos será que cada uno de ellos lo esté.

Para analizar aisladamente cada uno de los sólidos hay que tener en cuenta que lo que para el sistema son fuerzas interiores $\vec{f}_{ii}$ para cada uno de ellos pasan a ser fuerzas exteriores de reacción de los otros sólidos del sistema con los que está directamente vinculado y que tendrán el mismo módulo, dirección y recta de acción aunque sentido opuesto a la pareja que actuará sobre los otros sólidos, $\vec{f}_{ii} = -\vec{f}_{iii}$, por el principio de Acción y Reacción. En la determinación de las fuerzas interiores habrá que tener en cuenta, por tanto, el tipo de vinculación que las origina que podrá ser apoyo o articulación (pero no empotramiento ya que dejarían de ser dos sólidos para ser un mismo sólido) lo que constituye una o dos incógnitas de reacción adicionales a considerar por cada vinculación. En cualquier caso contamos para su resolución con 6 ecuaciones (3 en el plano) por cada sólido del sistema lo que supone un total de 6n (3n) ecuaciones a plantear.

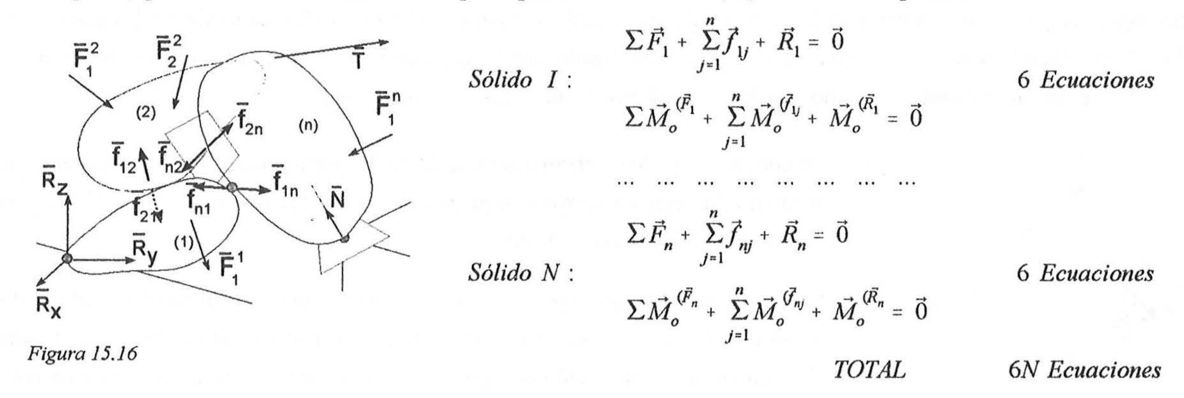


Figura 15.16

Sólido I :

$$\Sigma\vec{F}_1 + \sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{1j} + \vec{R}_1 = \vec{0}$$

$$\Sigma\vec{M}_o^{(\vec{F}_1} + \sum_{j=1}^{n}\vec{M}_o^{(\vec{f}_{1j}} + \vec{M}_o^{(\vec{R}_1} = \vec{0}$$

6 *Ecuaciones*

... ...

Sólido N :

$$\Sigma\vec{F}_n + \sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{nj} + \vec{R}_n = \vec{0}$$

$$\Sigma\vec{M}_o^{(\vec{F}_n} + \sum_{j=1}^{n}\vec{M}_o^{(\vec{f}_{nj}} + \vec{M}_o^{(\vec{R}_n} = \vec{0}$$

6 *Ecuaciones*

TOTAL 6N *Ecuaciones*

que sumadas todas dan las 6 ecuaciones de las fuerzas exteriores al sistema ya que las fuerzas interiores se anulan dos a dos y sus momentos al ser de signo contrario también.

Si el sistema conserva algún grado de libertad será un MECANISMO neto pero se podrá determinar la configuración de equilibrio en función de los parámetros libres para un determinado sistema de fuerzas y determinar por medio de la Estática todas la incógnitas de reacción. Si al sistema se le han fijado estrictamente las posibilidades de movimiento estará en EQUILIBRIO ISOSTÁTICO independientemente del sistema de fuerzas actuantes y podrán como en el caso anterior resolverse todas las incógnitas de reacción. Si, por el contrario, tiene más ligaduras o vínculos de los estrictamente necesarios el sistema estará en EQUILIBRIO HIPERESTÁTICO y no se podrán determinar las incógnitas de reacción.

Pero encontramos en los sistemas una nueva posibilidad definida por ser parcialmente hiperestático aun constituyendo en su conjunto un mecanismo. Es decir, si a los 6N grados de libertad del sistema le restamos el nº de coacciones c que totalizan los vínculos entre sólidos y las ligaduras externas puede suceder que teóricamente no quede ningún grado de libertad y sin embargo no se encuentre en equilibrio para cualquier sistema de fuerzas que pueda actuar sobre el sistema. En tal caso se dice que es un SISTEMA PSEUDO-ESTÁTICO o que tiene una distribución crítica de sus elementos. Esta situación está asociada a que el sistema deje de ser compatible y no tenga solución (o tenga infinitas).

15.7 LIGADURAS RUGOSAS. FUERZAS DISIPATIVAS.

Hasta ahora hemos planteado las ecuaciones de equilibrio de los sistemas materiales con ligaduras o vínculos mediante unas reacciones **LISAS** tan grandes como hiciera falta para impedir el movimiento en determinadas direcciones (traslaciones o giros) anulando algunos de los grados de libertad del sistema.

Sin embargo la experiencia demuestra que no son suficientes para expresar el problema real ya que muchas veces una fuerza aplicada que no encuentra oposición directa de los vínculos no implica el movimiento del cuerpo como sería de esperar porque se está generando indirectamente una "resistencia". Otras, por el contrario, observamos que las partículas de un cuerpo en movimiento sobre el que dejan de actuar las causas que lo habían originado no se mantienen con la velocidad alcanzada en dicho instante sino que acaban por anularse ante la "resistencia" generada en los vínculos.

Para "corregir" este desequilibrio es necesario introducir otro tipo de FUERZAS PASIVAS, generadas también por las ligaduras, que a diferencia de las lisas -ilimitadas y fundamentalmente geométricas- tienen un valor limitado y dependen de las características de los materiales en contacto, por lo que las denominamos reacciones **RUGOSAS** y como fuerzas pasivas que son se van a caracterizar igualmente por no provocar el movimiento por sí mismas aunque puedan llegar a impedirlo, modificar e incluso transmitir de un sólido a otro.

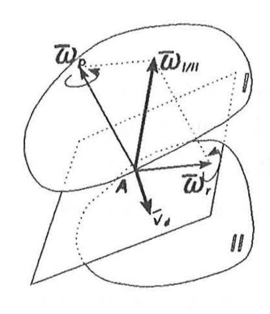


Figura 15.17

Para estudiar estas resistencias al movimiento tenemos que volver la vista atrás y recordar los movimientos posibles entre sólidos tangentes dado que se trata de un fenómeno real que se produce cuando dos sólidos permanecen en contacto y en principio, para que eso ocurra, la velocidad relativa entre cada uno de los puntos en contacto de los respectivos sólidos - ***velocidad de deslizamiento***- ha de encontrarse en el plano tangente común.

Pero además de la velocidad de deslizamiento el movimiento podía implicar una rotación relativa que descomponíamos en ***rodadura*** (componente de la rotación contenida en el plano tangente) y ***pivotamiento*** (según la dirección normal).

Cada uno de estos movimientos puede conllevar, en consecuencia, un tipo de resistencia específico que analizaremos por separado, independientemente de que en un mismo sólido puedan producirse los tres. En cualquier caso no podemos desligarlos de las causas que generan o tienden a generar el movimiento. Es decir, de la relación causa-efecto que se resume en: $\Sigma \vec{M}_i = \Sigma \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \Sigma \vec{r}_i \times m_i a_{\vec{i}_i}$ para el giro y $\Sigma \vec{F}_{ext} = M \vec{a}_C$ para la Traslación, sin olvidar que bajo la hipótesis de sólido rígido podemos simplificar el estudio mediante sistemas equivalentes reducidos.

Del mismo modo, bajo la hipótesis que la superficie de apoyo sea también rígida e indeformable, podrían admitirse las reacciones como sistemas equivalentes reducidos opuestos a los de las acciones, de forma que a la resultante de las fuerzas activas se oponga la de las fuerzas pasivas y al momento resultante un momento de reacción.

Así, al deslizamiento de los puntos en contacto entre sólidos, originado por la componente tangencial al plano de las fuerzas activas, se opondrá la RESISTENCIA AL DESLIZAMIENTO materializada en otra fuerza denominada *de rozamiento*, mientras que al giro relativo de un sólido respecto a otro, originado por el momento resultante de las fuerzas activas -que podemos expresar mediante sus componentes tangencial y normal- se opondrán las RESISTENCIAS A LA RODADURA O VUELCO y la RESISTENCIA AL PIVOTAMIENTO respectivamente, materializadas lógicamente en forma de momento, aunque experimentalmente se ha comprobado que tanto en una como en las otras la resistencia máxima, que es la única que se puede evaluar por ser visibles sus efectos al iniciarse el movimiento, es directamente proporcional al valor de la reacción normal que es la única oposición completa al movimiento que el vínculo puede desarrollar.

15.7.1 RESISTENCIA AL DESLIZAMIENTO

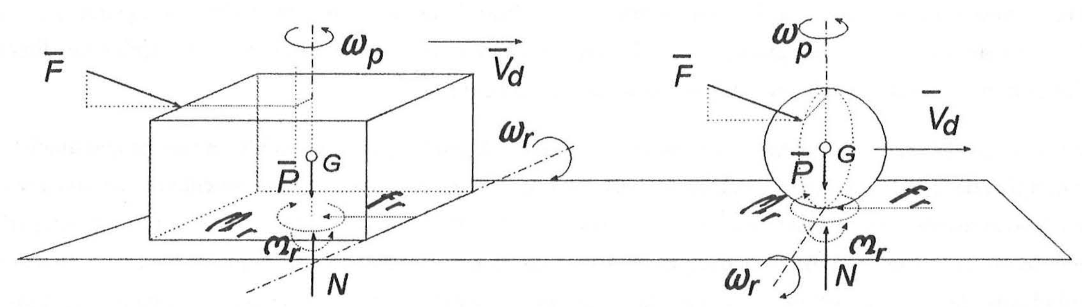


Figura 15.18

Para estudiar la Resistencia al Deslizamiento elegiremos un sólido cuya forma no favorezca la rodadura, como un prisma de escasa altura en comparación con las dimensiones de la base, ya que obviamente solo podrá girar respecto a sus aristas y suponemos que antes que eso ocurra el sólido va a iniciar una traslación y para eludir el pivotamiento consideraremos en principio unas fuerzas actuantes contenidas en un plano de simetría de forma que no den momento transversal.

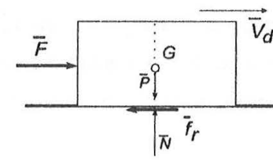


Figura 15.19

Hasta que se inicie el movimiento, por tanto, tiene que estar generándose una fuerza en la superficie de contacto que anule estrictamente en cada instante el valor de la fuerza introducida $\vec{F} + \vec{f}_r = 0$, habiéndose observado experimentalmente (Coulomb, 1781) que sin depender del área de las superficies en contacto, cuanto más pesado es el cuerpo más tarda en producirse la desigualdad.

Esto indica que el *valor máximo* de dicha fuerza puede expresarse como $f_{r_{max}} = k\,N$ denominando al factor de proporcionalidad k ***Coeficiente de Resistencia al Deslizamiento***, cuyo valor -adimensional- depende fundamentalmente de la textura y composición de los materiales en contacto, y se obtiene de la experimentación.

Del mismo modo se puede constatar que una vez iniciado el movimiento resulta difícil detener el sólido aunque se hagan disminuir ligeramente las causas que lo han provocado. Si tenemos en cuenta la aparición repentina de la fuerza "de inercia" $\vec{F} + \vec{f}_r^{\,\prime} + \vec{\Phi} = \vec{0}$ se comprende que el valor de la fuerza de rozamiento $f_r^{\prime} = k'\,N$ tenga que descender bruscamente $f_r^{\prime} < f_{r_{max}}$ lo que se interpreta como una disminución del coeficiente de rozamiento k' del orden de un 25% respecto al estático k, justificado por el predominio en este último de la adherencia mientras que en k' predomina el rozamiento. De ahí la peligrosidad de que las ruedas de un vehículo comiencen un deslizamiento, ya que tenderá a persistir hasta que se modifiquen sustancialmente las fuerzas que lo causaron.

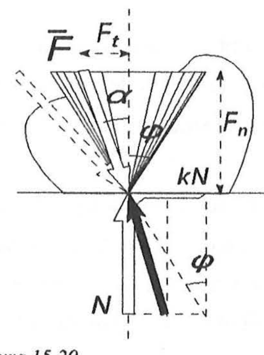


Figura 15.20

Sin embargo del desconocimiento del valor de k antes de romperse el equilibrio solo puede afirmarse que $f_r \leq k\,N = f_{r_{max}}$, es decir $f_r <= k\,N$ ya que lo único seguro es $f_r = F_t$ siendo F_t la componente tangencial de la resultante de las fuerzas activas.

Según esto, el ángulo α que forma la resultante con la normal al plano de tangencia en el equilibrio no podrá ser superior a un valor $\alpha_{max} = \varphi$ tal que $tg\varphi = k$ por lo que también puede definirse el coeficiente de rozamiento por el *ángulo de rozamiento* φ, entendiendo que el sólido permanecerá en equilibrio siempre que las fuerzas activas estén contenidas dentro de un cono de revolución de semiángulo φ también conocido como ***cono de rozamiento***.

15.7.2 RESISTENCIA A LA RODADURA

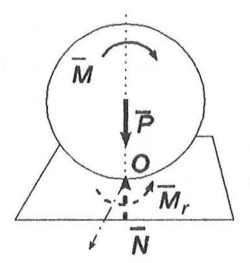


Figura 15.21

Los ensayos para cuantificar el valor de la Resistencia a la Rodadura (del orden de $\frac{1}{10}$ de la resistencia al deslizamiento) implican el contacto entre dos materiales tales que ésta sea tan grande que no llegue a deslizar enmascarando aquella. Para independizar movimientos, elegimos por tanto un cuerpo con poca resistencia a rodar como la esfera. A pesar de ello la realidad constata que, aunque se aplique un momento $\vec{M}$, el cuerpo no comienza a rodar hasta que alcanza un valor máximo, por lo que es preciso admitir que mientras no se inicia el giro se esta generando un momento de reacción M_r tal que $\vec{M}_O - \vec{M}_r = \vec{0}$.

Dicho valor máximo es, basándonos en la experiencia, tanto más grande cuanto mayor es el valor de la componente de la fuerzas normal al plano por lo que lo podemos también expresar como $M_{r_{max}} = \delta N$ denominando δ el ***Coeficiente de Resistencia a la Rodadura*** cuyo carácter **dimensional** se deduce de la expresión anterior, ya que solo puede tener dimensiones de longitud.

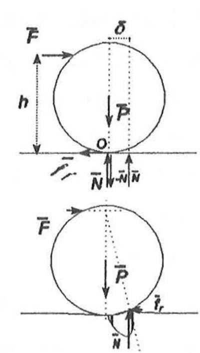


Figura 15.22

Esta circunstancia permite establecer una equivalencia física en base a la teoría de vectores deslizantes ya que, si añadimos un par de fuerzas $\vec{N}$, $-\vec{N}$ cuyo momento sea equivalente al momento de la resistencia, podría interpretarse el resultado como el desplazamiento de la normal respecto al punto de contacto.

Como para sólidos rígidos no sería aceptable dicha explicación ya que la reacción no podría estar aplicada en el aire, tendremos que admitir que los sólidos se deforman creando una especie de promontorios por los que deja de ser puntual la zona de contacto siendo en realidad $\vec{N}$ la resultante de un sistema continuo diferencial.

15.7.3 RESISTENCIA AL VUELCO

Haciendo extensivo el momento de resistencia a la rodadura al caso de sólidos con más de un punto en contacto, por ejemplo el prisma, diríamos que para que no gire respecto a una de sus aristas se tiene que estar generando un ***momento de resistencia al vuelco*** que solo encuentra significado físico en el desplazamiento de la reacción normal hacia dicha arista, produciéndose el vuelco cuando ya no se puede desplazar más porque dejaría de actuar sobre el sólido.

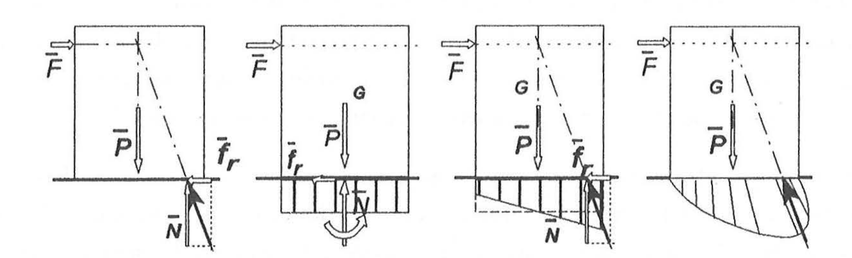


Figura 15.23

La explicación desde el punto de vista de los vectores deslizantes es que el sistema continuo rectangular que forman las reacciones del suelo cuando no existe ninguna componente paralela al plano deja de serlo para convertirse en trapezoidal o triangular según el valor del momento generado por F ya que un momento equivale a un par y éste a su vez puede considerarse como un sistema continuo antisimétrico que aumenta las tensiones de una mitad y disminuye las de la otra como se refleja en la figura. En la realidad, sin embargo, descubriremos que las deformaciones generadas en el cuerpo sustentante originan un bulbo de presiones algo diferente al considerado.

15.7.4 RESISTENCIA AL PIVOTAMIENTO

Para comprender, por último, la Resistencia al Pivotamiento, no podemos prescindir de la resistencia al deslizamiento ya que son estas fuerzas de fricción la que se van a oponer tangencialmente al giro con el momento que originan respecto a la normal al plano tangente común pero, a diferencia del movimiento de traslación, en el que todos los puntos en el movimiento tienen la misma velocidad de deslizamiento, en el pivotamiento las velocidades de los puntos en contacto son tangentes a las trayectorias circulares de cada una de las partículas y, en consecuencia, las fuerzas de rozamiento por elemento de superficie $f_r\, dA\, r = M_r = M_p$ tienen la misma dirección y sentido opuesto que ellas, encontrándonos ante una distribución circular.

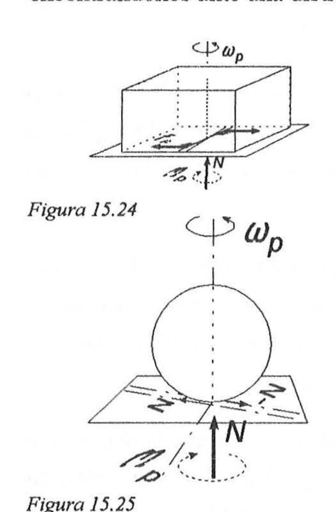


Figura 15.24

Figura 15.25

El momento de estas "fuerzas" será $\int f_r\, dA\, r = M_p = M_{pr}$ y cuando el sólido esté a punto de pivotar $f_r = k f_n$ siendo fn las fuerzas normales de reacción por elemento de superficie, por lo que la integración dará un valor proporcional a la normal: $\int k f_n\, dA\, r = \delta_p N = M_{p_{max}}$

Este ***coeficiente*** δ_p se denomina ***de resistencia al pivotamiento*** y como en el caso anterior tiene dimensiones de longitud pero por ser función de k dependerá también de la naturaleza de las superficies en contacto, y además, por obtenerse de la integración a toda la superficie de contacto, dependerá de la forma de dichas superficies y de su extensión de lo que se deduce que cuando es puntual $\delta_p \Rightarrow 0$ y apenas aparece este fenómeno aunque en la realidad es muy difícil anularlo en su totalidad. Tal es el caso de una peonza que acaba parándose al cabo de cierto tiempo por las resistencias de la superficie con la que roza ya que su contacto no es estrictamente puntual.

Si tenemos simetrías formales respecto al eje de pivotamiento la resistencia originada será un momento de reacción y podrá por tanto interpretarse como un par de fuerzas de módulo N contenidas en el plano de tangencia a una distancia δ_p entre sí.

15.8 TRABAJO DE LAS FUERZAS PASIVAS

De la expresión de trabajo se deduce que para ligaduras lisas solo realizarían trabajo las fuerzas pasivas originadas por los apoyos ya que son las únicas que no limitan todos los posibles desplazamientos, pero al ser dichos desplazamientos ortogonales a las reacciones normales, no realizan trabajo. Sin embargo, para ligaduras no lisas la dirección de la fuerza de rozamiento coincide con la del movimiento y es de sentido opuesto, por lo que el trabajo de las fuerzas pasivas ya no es nulo y será de signo negativo, dejando de ser aplicable el "Principio de Conservación de la Energía Mecánica". Esta Energía **DISIPADA** se invierte en deformaciones permanentes del sólido o en energía calorífica.

En cualquier caso la aparición de Fuerzas Disipativas no se reduce al movimiento relativo de sólidos tangentes; los fenómenos disipativos son completamente generales e invaden el terreno de la Mecánica Clásica o Newtoniana conectándola, de un modo no bien dilucidado, con otros terrenos de la Física como la Dinámica de fluidos, en los que aparecen fuerzas viscosas que tienden a frenar el movimiento de las regiones más veloces ocasionando el paso de energía mecánica a calorífica o, incluso, la propia Termodinámica.

ESFUERZOS EN ELEMENTOS LINEALES

16.1 TRANSMISIÓN DE ACCIONES - CARGAS, SOLICITACIONES Y ESFUERZOS.

En el tema anterior hemos podido condicionar exclusivamente el equilibrio del sólido rígido e indeformable a la nulidad del sistema de fuerzas exteriores, incluidas de acción y reacción, independientemente del sistema de fuerzas interiores originado entre las partículas del sólido ya que, por hipótesis, sus distancias permanecen inalterables y no se producen movimientos relativos que puedan implicar aceleración. Sin embargo no deja de parecer contradictorio prescindir en el estudio del sólido rígido e indeformable de las causas que pueden precisamente alterar dicha propiedad; esto es, de las tensiones que se generan en su interior. Si el equilibrio se alcanza es porque a las acciones exteriores que tienden a modificar la posición de los puntos donde están aplicadas se oponen, tratando de impedirlo, las interacciones de las partículas contiguas a ellos que a su vez son equilibradas por las de los puntos de sus entornos, implicándose de este modo, tras los "ajustes" necesarios, todas y cada una de las partículas del sólido en una especie de "canal de transmisión" de las acciones hasta los vínculos exteriores de sustentación. Dichas interacciones o **TENSIONES** originadas serán, en cada caso, las estrictamente necesarias para alcanzar el equilibrio de cada partícula siempre y cuando no se agote la capacidad resistente del vínculo interno que las une -objeto de otras materias- por lo que resulta de gran importancia el conocimiento de los valores máximos alcanzados a fin de no sobrepasar los límites que puedan originar la deformación.

Estableciendo un paralelismo con las fuerzas de rozamiento, que impiden el movimiento sólo hasta que las fuerzas a contrarrestar alcanzan un determinado valor, a partir del cual tienden incluso a disminuir su oposición, podría decirse que las fuerzas interiores, originadas por las acciones exteriores y las reacciones en los vínculos de sustentación, son contrarrestadas por las fuerzas de cohesión que mantienen unidas las partículas hasta que superan un cierto valor, a partir del cual se inicia la deformación que será, por lo general, inicialmente elástica (es decir, recuperable al cesar las causas) adquiriendo progresivamente características de plasticidad o incluso provocar la fluencia del material aún desapareciendo las acciones causantes de la deformación. En consecuencia, la hipótesis de sólido rígido va a conllevar necesariamente el cálculo necesario para que no se alcancen los límites característicos del material o, en caso de superarlos ligeramente, que el sólido o el sistema pueda mantenerse en equilibrio aún después de producirse una pequeña deformación. Este es, en esencia, el objetivo del cálculo de elementos estructurales (resistentes), en los cuales, de hecho, el conocimiento de lo que pueda "pasar" en el interior de la pieza "potencialmente" deformable, sometida a unas acciones exteriores que denominaremos **CARGAS**, es tan importante como el despejar las incógnitas de reacción que, por otro lado, serán a su vez "cargas" sobre el elemento sustentante y requerirán igualmente un cálculo y comprobación a deformación.

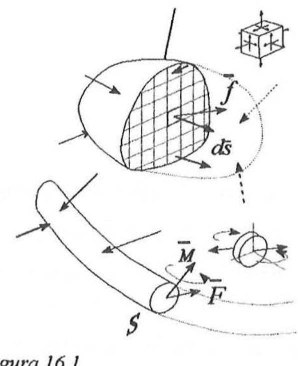


Figura 16.1

Y del mismo modo que para determinar la configuración de equilibrio de los sistemas con algún grado de libertad se recurría al análisis individualizado de cada uno de las partes considerando como exteriores las reacciones sobre ella de las demás, para determinar las fuerzas interiores en un sistema material continuo, sometido a determinadas acciones exteriores equilibradas, de partida, por las reacciones en los vínculos de sustentación, se recurrirá, mediante secciones hipotéticas, al análisis en el entorno de los puntos (al menos de los más desfavorables) de las acciones que transmiten las partículas contiguas de las partes suprimidas sobre el entorno considerado, en el que puede admitirse que no hay giro porque lo impiden "solidariamente" los demás.

Si en el sólido una de las dimensiones predomina considerablemente sobre las otras dos puede limitarse inicialmente el análisis al nivel de "rebanada" en cuyo caso las fuerzas interiores de la parte suprimida sobre la sección transversal de la pieza, suponiendo que sigue plana una vez aplicadas las cargas del exterior, pueden reducirse todas a un centro común.

Al ser una sección finita, no diferencial como en el entorno del punto, el sistema equivalente a las fuerzas interiores aplicadas en la sección, que denominaremos SOLICITACIONES sobre la sección, quedará definido por su resultante y momento resultante en dicho centro y sus valores serán tales que equilibren el sistema de fuerzas exteriores actuante sobre la parte no suprimida. Es decir, iguales y opuestos a la resultante y al momento resultante de dicho sistema o, lo que es lo mismo, equivalentes al sistema de las fuerzas exteriores que queda actuando sobre la parte suprimida. En general, para un sistema cualquiera de fuerzas exteriores, tanto la resultante como el momento podrán descomponerse según un sistema de referencia uno de cuyos ejes sea el propio eje longitudinal, de forma que la componente según esta dirección de la resultante se denomina SOLICITACIÓN AXIAL (o normal) y la tangencial SOLICITACIÓN CORTANTE mientras que a las correspondientes al momento se les denomina, respectivamente, SOLICITACIONES a TORSIÓN o a FLEXIÓN.

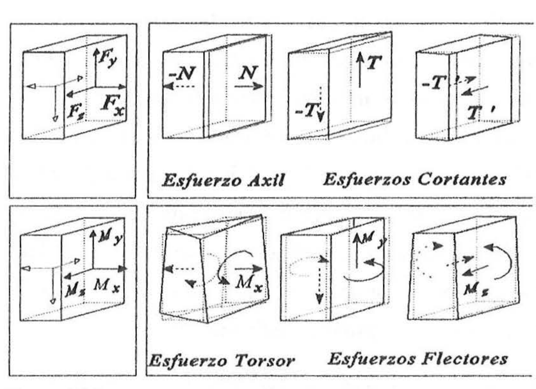


Figura 16.2

Como las acciones que la parte suprimida ejerce sobre la sección S de la parte que consideramos son iguales y opuestas a las que ésta ejerce sobre la sección correspondiente S' de la suprimida, las parejas de solicitaciones (iguales y opuestas) de cada sección, denominadas ESFUERZOS, forman obviamente un sistema nulo, pero sus valores dan una idea de cómo va a estar solicitada la pieza en ese punto y, en consecuencia, de cómo se podría deformar ya que, si una fuerza no equilibrada provoca la *Traslación* y un momento el *Giro*, se comprende inmediatamente que las parejas de fuerzas van a propiciar la "traslación" de una sección respecto a la contigua y que las parejas de momentos el "giro" relativo de ambas.

En otras palabras, si el sólido no es totalmente rígido e indeformable las reacciones en los vínculos serán las mismas pero los esfuerzos no, ya que se trasformarán parcial o totalmente en deformación hasta el punto de no darse alguno de ellos, como en los hilos flexibles que, al no oponer ninguna resistencia a ser "doblados" no se van a dar los esfuerzos a flexión o compresión. En este sentido vamos a diferenciar los elementos lineales según su grado de rigidez a flexión, ya que al limitarnos al estudio de elementos lineales "planos" o, más exactamente, de aquellos cuya dirección predominante y la de acción de las cargas se puede considerar contenida en el plano de simetría de las piezas, no se va a producir componente a torsión. Atendiendo pues al tipo de esfuerzos que predominantemente van a poder soportar dividiremos el estudio de los elementos resistentes lineales (planos) en:

BARRAS RÍGIDAS, *piezas prismáticas delgadas capaces de resistir esfuerzos a flexión y, por tanto, a cortantes aunque ocasionalmente puedan trabajar también a tracción y compresión;*

ENTRAMADOS, *sistemas formados por barras articuladas entre sí cuya esbeltez, aun siendo rígidas, no las hace idóneas para trabajar a flexión ni a cortantes pero sí a compresión y tracción;*

HILOS, *sistemas continuos inextensibles pero totalmente flexibles, lo que hace que solo sean capaces de resistir esfuerzos a tracción ya que la compresión conlleva inevitablemente la flexión.*

En los tres grupos serán de aplicación los métodos gráficos de resolución de sistemas de vectores aplicados planos estudiados en su momento, cuyo significado físico, especialmente el de los polígonos y curvas funiculares y antifuniculares, será de gran utilidad. En cualquier caso, mediante métodos analíticos contaremos con las tres ecuaciones que nos proporciona la Estática de sistemas planos: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$,$\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ y $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ para su resolución. Planteadas para el sólido o los sistemas en su conjunto, siempre y cuando no estén más ligados de lo estrictamente necesario, nos permitirán despejar previamente las incógnitas de reacción originadas por las coacciones de los vínculos que, como veíamos para el sólido en general, se reducen básicamente a tres: apoyo (1 incógnita), articulación (2) y empotramiento (3). Planteadas para equilibrar las secciones que nos interesen estudiar obtendremos, sin embargo, las solicitaciones y, por tanto los esfuerzos, en la sección.

16 BARRAS RÍGIDAS. DIAGRAMAS DE ESFUERZOS.

Por definición una barra prismática, en el sentido más extenso de la palabra, será un medio continuo, posiblemente deformable, sometido a las tensiones originadas por las acciones exteriores, aunque en nuestro estudio la supongamos perfectamente homogénea, rígida e indeformable, capaz de soportar las cargas aplicadas a lo largo de una de sus direcciones, predominante sobre las otras dos, oponiendo resistencia a la flexión.

Geométricamente entenderemos como barra el cuerpo rígido engendrado por un área plana, generalmente de sección constante, rectangular o no, al moverse arbitrariamente según un movimiento de traslación que tiene componente ortogonal al plano de la sección. La mayor parte de las barras utilizadas admiten un plano de simetría que contiene la línea sobre la que se mueve el c.d.g. de la sección, admitiéndose, por lo general, en dicho plano las rectas de acción de las cargas, si bien en un estudio más amplio de las barras habría de tenerse en cuenta la posibilidad de acciones más complejas que se descompondrían en sus componentes según aquél y otro plano transversal.

Sólo si la dirección predominante es horizontal y las cargas están aplicadas normalmente a ella nos referiremos en rigor a vigas (flexión simple), aunque las hipótesis y el procedimiento de cálculo son igualmente válidas para piezas inclinadas con cargas verticales o piezas horizontales con cargas inclinadas (flexión compuesta), así como piezas verticales con cargas fundamentalmente dirigidas en la dirección de la pieza, bien centradas en la sección o desviadas, provocando indirectamente por pandeo la flexión (flexión esviada).

16.2.1 VÍNCULOS Y GRADOS DE LIBERTAD

Limitándonos al primer caso, entendido como problema en el plano, una barra de las características mencionadas representa un sistema mecánico con tres grados de libertad, quedando determinada su configuración mediante otros tantos parámetros como pueden ser un punto P(x,y) de la barra y su inclinación φ. Dichos parámetros vienen, en la práctica, definidos por los tipos de vínculos y sus grados de libertad, siendo de aplicación todo lo expuesto para el sólido plano en el tema anterior. Así:

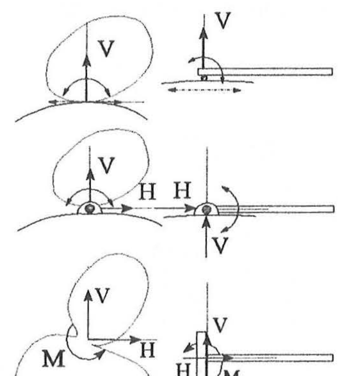


Figura 16.3

El APOYO define un solo parámetro de la barra, por ejemplo "*y*", y a cambio una incógnita de reacción *V*, dejándola dos grados de libertad (*x*, φ), por lo que únicamente transmite al sistema sustentante acciones normales a la "línea" de apoyo ya que cualquier otra provocará un giro o un desplazamiento tangencial.

La ARTICULACIÓN define dos parámetros (*x*, *y*) originando dos incógnitas de reacción, *H* y *V*, por lo que conserva un solo grado de libertad (φ) que permite a la barra girar en torno a la articulación. Transmite acciones en cualquier dirección siempre que la recta de acción pase por la articulación.

El EMPOTRAMIENTO fija por sí solo la configuración de equilibrio ya que quedan definidos todos los parámetros (*x*, *y*, φ) a cambio de las tres incógnitas de reacción H, V y M, transmitiendo y soportando cualquier acción.

Si la barra conserva algún grado de libertad constituirá un Mecanismo, aunque pueda estar en equilibrio para un determinado tipo de cargas. Los casos más sencillos de resolución, en general, serán los de vinculación isostática en los que se fijan estrictamente los grados de libertad ya que los casos de hiperestatismo no son objeto de la Mecánica al no poder resolverse las incógnitas de reacción exclusivamente con las ecuaciones que proporciona, siendo necesario acudir al planteamiento de las deformaciones para introducir las herramientas de cálculo necesarias para su resolución. De este modo podemos considerar como isostáticas la barra simplemente apoyada (sólo si la carga es normal a su dirección), la barra articulada-apoyada con o sin voladizo o la ménsula (barra empotrada)

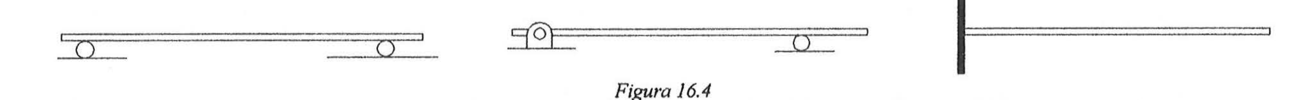


Figura 16.4

mientras que serán hiperestáticas la barra triplemente apoyada, la barra doblemente empotrada, biarticulada empotrada-apoyada o empotrada-articulada, etc.

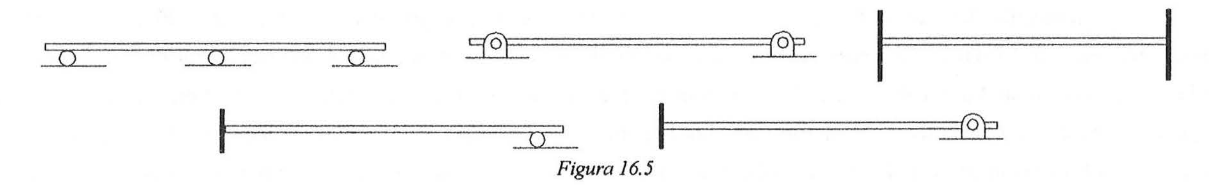
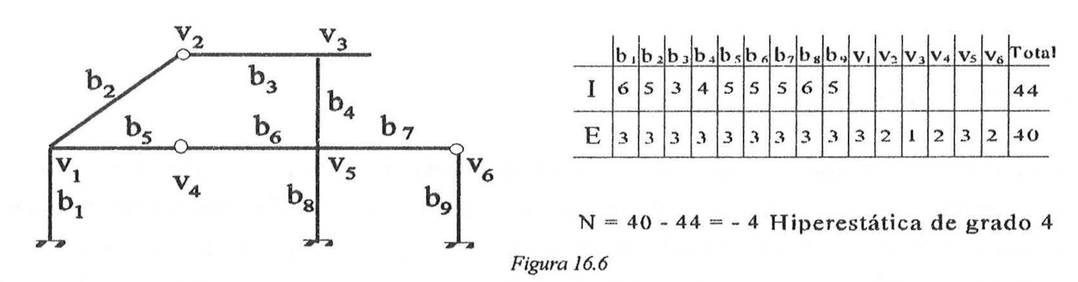


Figura 16.5

En el caso de tratarse de sistemas de barras calcularemos previamente su grado de libertad N=E-I (ecuaciones - incógnitas) sabiendo que cada barra cuenta con 3 ecuaciones en el plano y los vínculos interiores del sistema, al plantear su propio equilibrio, aportan tantas nuevas ecuaciones de compatibilidad como grados de libertad suprime. A modo de ejemplo el sistema de la figura, compuesto por 9 barras y 6 vínculos interiores además de los 3 empotramientos con el exterior, resultará con un hiperestatismo de grado 4.



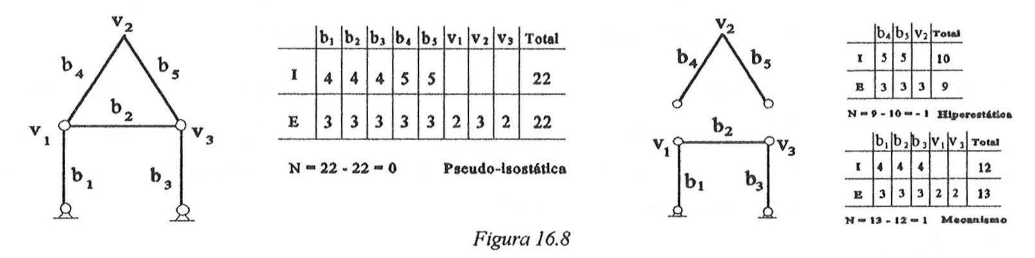
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Total
I	6	5	3	4	5	5	5	6	5							44
E	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	2	3	2	40

N = 40 - 44 = - 4 Hiperestática de grado 4

Figura 16.6

Figura 16.7

siendo el sistema isostático más elemental el formado por dos barras biarticuladas en el que N = 6 - 6 = 0 aunque el resultado N = 0 no implica necesariamente el isostatismo como vemos en el siguiente ejemplo:



	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	v_1	v_2	v_3	Total
I	4	4	4	5	5				22
E	3	3	3	3	3	2	3	2	22

N = 22 - 22 = 0 Pseudo-isostática

	b_4	b_5	v_2	Total
I	5	5		10
E	3	3	3	9

N = 9 - 10 = - 1 Hiperestática

	b_1	b_2	b_3	v_1	v_3	Total
I	4	4	4			12
E	3	3	3	2	2	13

N = 13 - 12 = 1 Mecanismo

Figura 16.8

ya que puede tener parte hiperestática y conservar en otra algún grado de libertad, denominándose en tal caso Pseudo-estático como vimos en el tema anterior.

16.2.2 SOLICITACIONES Y ESFUERZOS

En lo sucesivo nos limitaremos a estudiar el comportamiento de barras rectas, prismáticas, en equilibrio isostático bajo la acción de las cargas contenidas en su plano central, ya sea ***discretas***, es decir, puntuales o concentradas en un punto, o bien ***continuas***, repartidas en un tramo de la barra o en toda su longitud, en cuyo caso se expresarían mediante una función q=q(x) que nos diera la carga en cada punto de la misma, expresada en unidades de fuerza por unidad de longitud.

Como ejemplo de carga continua podemos entender el peso de un forjado apoyado sobre una viga, la acción de cerramientos verticales sobre pilares por efecto del viento, el peso propio de la barra, etc..., mientras que ejemplos de cargas puntuales o discretas podrían ser, entre otros, las originadas por vigas apoyadas en otras vigas o zunchos, cuya posible asimetría de carga daría lugar igualmente a la aplicación de pares o momentos normal o tangencialmente a la directriz de la barra.

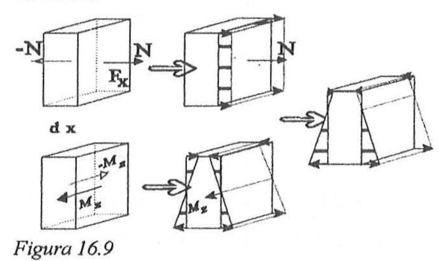


Figura 16.9

Como ya vimos para el caso general y considerando que las barras sufren deformaciones tan pequeñas que podemos asimilarlas a cuerpos rígidos, aceptaremos que, sobre cada una de las caras de la sección S-S' considerada y aplicadas en sus c.d.m., aparecen las solicitaciones correspondientes a los pares internos de fuerzas y momentos que equilibran, respectivamente, las acciones sobre el tramo de viga con en el que han quedado ligados trás el "corte", y representan el sistema equivalente al que actúa sobre el otro tramo.

Aunque estas cuestiones exigen conocimientos de elasticidad y resistencia de materiales, diremos que dichos sistemas no son otros que los equivalentes reducidos de la distribución real de tensiones producidas por efecto de las solicitaciones resultantes sobre cualquier sección transversal.

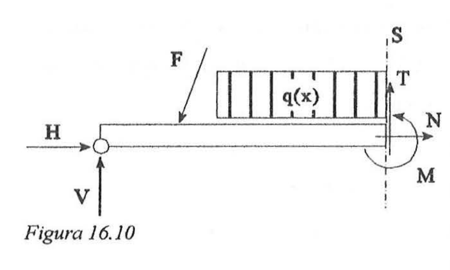


Figura 16.10

En resumen, si las acciones sobre la barra están contenidas todas en el mismo plano que ésta (plano del papel), las solicitaciones sobre la sección S se reducen a un momento M aplicado según la normal a dicho plano y a una resultante $\vec{R}$ cuya descomposición, según la directriz de la barra y su dirección normal, darán una componente N normal al plano de la sección y otra T tangencial contenida en ella, que equilibran el sistema de fuerzas exteriores (de acción y reacción) que queda al lado izquierdo de la sección.

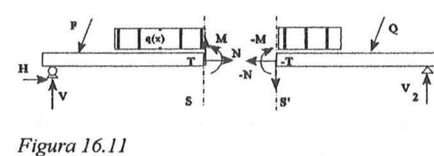


Figura 16.11

Los pares de solicitaciones iguales y opuestas que actúan conjuntamente en cada sección de la barra se denominan, como ya hemos visto, ESFUERZOS en la sección, constituyendo las componentes normales {N, -N} lo que se conoce como ESFUERZO AXIL; las tangenciales {T, -T} el ESFUERZO CORTANTE y los momentos {M, -M} el esfuerzo o MOMENTO FLECTOR.

El efecto del primero sobre una rebanada dx de la región de la barra en la que actúa es la de comprimirla o traccionarla, es decir, acercar o separar homogéneamente, en la dirección del esfuerzo, las partículas que la forman, tanto las de las fibras superiores como inferiores y por tanto, en igual medida, las del propio eje de la barra. Asímismo, las fuerzas tangenciales tienden a desplazar en sentidos opuestos las dos caras de la sección sobre la que actúan o de la rebanada dx considerada, es decir, tienden a "cortar" la barra con un esfuerzo de magnitud T; finalmente, el par de momentos M actua sobre la rebanada en el sentido de "flexionarla", acortando una de las fibras, por ejemplo la superior, mientras alarga la inferior, lo que conlleva que, a partir de una cierta línea que no modificaría su longitud, conocida como "fibra neutra", la parte superior de la barra "trabajaría" a compresión y la otra a tracción.

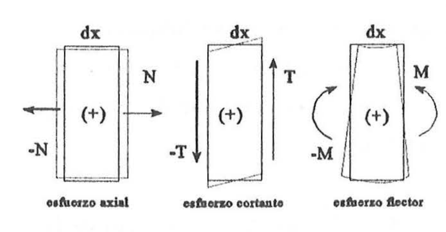


Figura 16.12

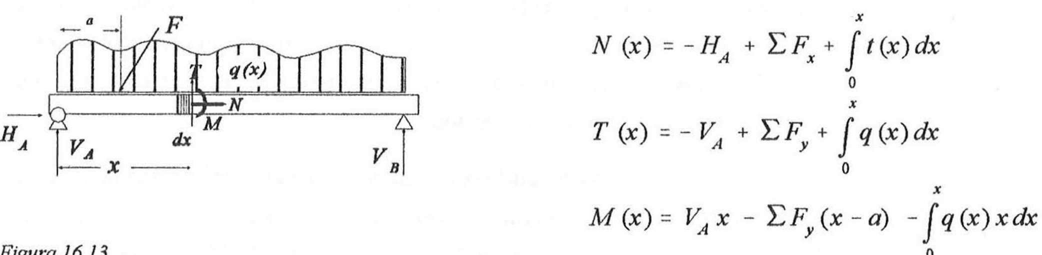
En resumen, los esfuerzos en una sección determinada de una barra comprenden los pares de solicitaciones que actúan en ambas caras de dicha sección, si bien su medida, evidentemente, por ser iguales y opuestas, es la de una de ellas con "signo" arbitrario, cuyo convenio más utilizado es el de adoptar como positivos los esfuerzos cuando los sentido de las solicitaciones sobre la sección S (cara derecha de la parte izquierda) coinciden con los ejes coordenados positivos (teniendo en cuenta que el momento sería un vector en la dirección del eje perpendicular al plano y, por tanto, adoptaría el sentido contrario de giro de las agujas del reloj.

De esta forma, si tomamos una rebanada genérica dx de la barra, el convenio de signos adoptado da lugar a que el esfuerzo cortante sea positivo en las regiones de la barra en las cuales se produzca un giro en el sentido contrario al de las agujas del reloj; el momento flector será positivo en las regiones en las cuales dicho momento produzca alargamiento de las fibras inferiores a la línea neutra y un acortamiento de las superiores y el esfuerzo axil será positivo en aquellas zonas para las cuales se produzca una tracción.

16.2.3 CALCULO Y DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

Partiendo de una pieza prismática delgada en la que se han calculado las reacciones de sustentación que equilibran la carga, para averiguar cual es la sección más "solicitada" y, por tanto, por donde la pieza comenzaría a deformarse, habría que conocer, al menos *en teoría*, los esfuerzos en todas las secciones, aunque no es necesario dar todos los valores sino una ley de variación de la que poder obtener los máximos correspondientes.

Los esfuerzos axil (N) y cortante (T) en una sección cualquiera de una barra serán, según lo convenido, el resultado de equilibrar, con el signo correspondiente, todas las fuerzas normales a la directriz de la barra situadas a la izquierda de la sección, incluidas las reacciones vinculares. Análogamente, el momento flector será la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas a la izquierda de la sección respecto a ésta, con los signos adoptados por convenio, considerando la carga continua que queda exclusivamente a la izquierda de la sección y no el sistema equivalente a toda la carga, ya que se trata de un recurso ***solo válido*** para la obtención de las reacciones exteriores, pudiéndose escribir:



$$N(x) = -H_A + \Sigma F_x + \int_0^x t(x)\,dx$$

$$T(x) = -V_A + \Sigma F_y + \int_0^x q(x)\,dx$$

$$M(x) = V_A\,x - \Sigma F_y\,(x-a) - \int_0^x q(x)\,x\,dx$$

Figura 16.13

donde se ha supuesto despreciables los momentos de las componentes tangenciales de las cargas y de la reacción vincular por tratarse de barras "delgadas" y partir inicialmente de la hipótesis de rigidez, aunque en el estudio de las barras reales "deformables" no podrá obviarse dicho momento ya que podría favorecer el pandeo de la pieza (en particular para piezas muy esbeltas o pilares, sometidos fundamentalmente a esfuerzos de compresión).

Las expresiones obtenidas son, en definitiva, funciones de la distancia al extremo de la barra por lo que su representación mediante diagramas resulta inmediata, ofreciendo una idea mucho más intuitiva que la propia expresión analítica de cómo y por donde podría fallar. Si las cargas son discretas es evidente que las leyes de cortantes y axiles permanecerán constantes mientras no aparezca otra carga que modifique su valor y, en consecuencia, el diagrama de momentos será poligonal con los vértices en los puntos de aplicación de aquéllas. Para cargas continuas las expresiones resultan de un orden superior y sus representaciones serán curvas pero, en cualquier caso, la relación existente entre las diferentes funciones nos va a marcar unas pautas para su representación.

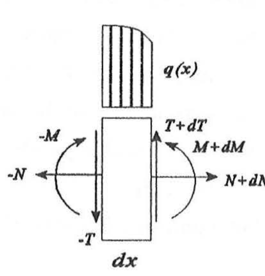


Figura 16.14

Para analizar la variación de los esfuerzos originada por una carga continua normal q(x) o tangencial t(x) aplicada en ella tomaremos un elemento dx de barra sustituyendo las partes suprimidas por las solicitaciones sobre las secciones que lo definen y plantearemos las ecuaciones de equilibrio de la rebanada:

$$T + dT - T - q(x)\,dx = 0 \;\Rightarrow\; dT = q(x)\,dx \;\Rightarrow\; \frac{dT}{dx} = q(x) \;\Rightarrow\; T = \int_0^x q(x)\,dx$$

es decir, el cortante es la integral de densidad de carga.

Análogamente, de existir carga paralela al eje longitudinal de la barra, t(x), la ley de axiles quedaría:

$$N + dN - N - t(x)\,dx = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dN}{dx} = t(x)$$

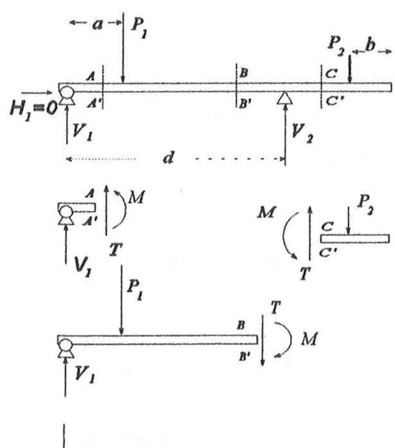
y la de flectores, despreciando infinitésimos de segundo orden, será:

$$-M + Tdx + q\,dx\frac{dx}{2} + M + dM = 0 \quad\Rightarrow\quad dM = -T\,dx \quad\Rightarrow\quad M = -\int_0^x T\,dx$$

Resumiendo, aunque los cálculos respectivos puedan realizarse de forma independiente, la integración de la ley de cargas proporcionará directamente la de esfuerzos cortantes y la de ésta última a su vez la de flectores, permitiéndonos obtener ya conclusiones interesantes, aún limitándonos al sólido rígido e indeformable:

- *Si q(x) es una función algebraica, T(x) será una función de orden inmediatamente superior y M(x) será, igualmente, otra función de orden inmediatamente superior a la de T(x).*
- *En consecuencia, la aplicación de cargas discretas {q(x)=0} proporciona un diagrama de cortantes limitado por rectas paralelas a la directriz de la barra, siendo triangular el de momentos.*
- *El diagrama de cortantes presenta saltos verticales en aquellas secciones de la barra donde hay aplicadas fuerzas discretas, de magnitud igual al módulo de éstas.*
- *En las secciones de la barra donde el cortante pasa por un valor nulo T = 0 o cambia de signo, el momento flector adquiere valores extremos (máximo o mínimo).*
- *Un momento directamente aplicado (par de fuerzas) provoca una discontinuidad en el diagrama de momentos igual al módulo del par, no afectando al diagrama de cortantes.*
- *Un apoyo o articulación en los extremos de la barra dan necesariamente un valor inicial o final nulo en la ley de momentos ya que ambos vínculos no oponen ninguna resistencia al giro de la sección.*

Aclararemos el procedimiento de cálculo mediante algunos ejemplos:



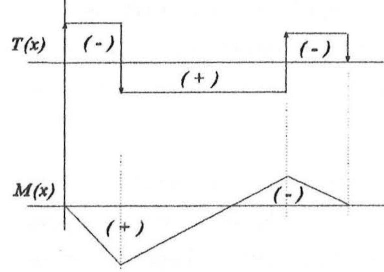


Figura 16.15

Sea la viga ARTICULADA-APOYADA de la figura, en la que se han aplicado dos fuerzas P_1, P_2, a distancias a y b de los respectivos extremos. El equilibrio de la barra en su conjunto se establecerá anulando el sistema de cargas con las reacciones:

$$\Sigma F_x = H_1 = 0$$

$$\Sigma F_y = V_1 + V_2 - P_1 - P_2 = 0$$

$$\Sigma M_1 = V_2 d - P_1 a - P_2 (L - b) = 0$$

Estas ecuaciones permitirán determinar V_1 y V_2 y estudiar la distribución de esfuerzos en el interior. Para ello imaginaremos un corte ficticio por AA' expresando el equilibrio de las fuerzas actuantes sobre la parte de barra que queda a la izquierda con las solicitaciones sobre la sección, obteniendo, *para* $0 < x < a$:

$$T = -V_1$$

$$M = V_1 \cdot x$$

Asimismo, si cortamos por BB', *para* $a < x < d$:

$$T = -V_1 + P_1$$

$$M = V_1 x - P_1(x - a) = (V_1 - P_1)x + P_1 a$$

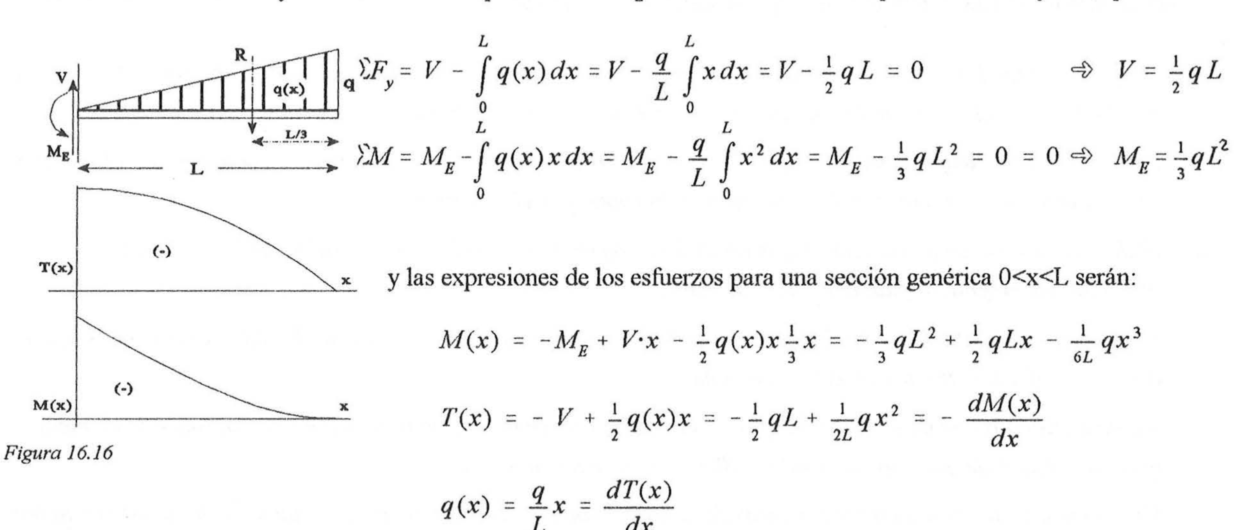
y al cortar por CC', *para* $d<x<L-b$:

$$T = -V_1 + P_1 - V_2 = -P_2$$

$$M = V_1 x - P_1(x-a) + V_2(x-d) = P_1 a - V_2 d + (V_1 - P_1 + V_2)x = -P_2(L-x-b)$$

donde la última igualdad corresponde a tomar momentos respecto a la parte suprimida (la derecha) con su signo.

Si consideramos una BARRA EMPOTRADA en ménsula, sometida a una carga continua, linealmente creciente desde cero en el empotramiento hasta alcanzar el valor q en el extremo libre de la barra, de longitud L, la ley de cargas podrá expresarse por la función $q(x) = \frac{q}{L}x$. Al no existir carga horizontal no habrá reacción horizontal en el empotramiento, obteniéndose la vertical V y el momento de empotramiento M_E de las ecuaciones de equilibrio del conjunto, quedando:



$$\Sigma F_y = V - \int_0^L q(x)\,dx = V - \frac{q}{L}\int_0^L x\,dx = V - \frac{1}{2}qL = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{2}qL$$

$$\Sigma M = M_E - \int_0^L q(x)\,x\,dx = M_E - \frac{q}{L}\int_0^L x^2\,dx = M_E - \frac{1}{3}qL^2 = 0 = 0 \Rightarrow \quad M_E = \frac{1}{3}qL^2$$

y las expresiones de los esfuerzos para una sección genérica 0<x<L serán:

$$M(x) = -M_E + V\cdot x - \frac{1}{2}q(x)x\frac{1}{3}x = -\frac{1}{3}qL^2 + \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{6L}qx^3$$

$$T(x) = -V + \frac{1}{2}q(x)x = -\frac{1}{2}qL + \frac{1}{2L}qx^2 = -\frac{dM(x)}{dx}$$

Figura 16.16

$$q(x) = \frac{q}{L}x = \frac{dT(x)}{dx}$$

habiéndose recurrido, para la obtención de la ley de momentos flectores, al sistema equivalente de la carga continua que queda a la izquierda de la sección genérica x, aunque el resultado tiene que ser idéntico si se plantea mediante una integral:

$$M(x) = -M_E + V\cdot x - \int_{\xi=0}^{\xi=x} q(\xi)(x-\xi)\,d\xi = -\frac{1}{3}qL^2 + \frac{1}{2}qLx - \int_{\xi=0}^{\xi=x} \frac{q}{L}\xi(x-\xi)\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{3}qL^2 + \frac{1}{2}qLx - \frac{q}{L}\left[\frac{1}{2}\xi^2 x - \frac{1}{3}\xi^3\right]_{\xi=0}^{\xi=x} = -\frac{1}{3}qL^2 + \frac{1}{2}qLx - \frac{1}{6L}qx^3$$

Figura 16.17

o bien integrando directamente la ley T(x), más fácil de obtener, teniendo en cuenta los límites de integración, es decir, las constantes de integración si se toma como integral indefinida.

En el estudio de las barras reales, es decir más o menos deformables, objeto de otros cursos, se establecerá la relación entre el momento flector y la flexión de la barra en función de las características de ésta mediante la expresión M = E I C, donde E=Módulo de elasticidad del material, I=Momento de inercia de la sección, C=Curvatura, expresable en la forma $C = \frac{1}{R_c} = \frac{y''}{[1+y'^2]^{3/2}} \approx y''$ pudiéndose admitir, para piezas no muy flexibles, que el giro de la sección, y por tanto la tangente a la directriz de la barra, $y' = \frac{dy}{dx}$, son muy pequeños pudiéndose despreciar el cuadrado del denominador, resultando $M \approx EIy''$ y, en consecuencia $q(x) = -EI\frac{d^4y}{dx^4}$.

Es decir, como la ley de cargas q(x) es la derivada de la de cortantes T(x) y la de cortantes de la de momentos M(x), al hacer $y'' = \frac{M}{EI} = \frac{dy'}{dx}$, integrando sucesivamente obtendremos la de giros y'(x) y de ésta, la ley de deformación y(x), siendo la flecha de la barra el valor máximo de dicha función $f = y_{max}$. Así, para el ejemplo anterior, si continuásemos integrando obtendríamos:

$$y''(x) = \frac{1}{EI}M(x) = \frac{1}{EI}\left[-\tfrac{1}{3}qL^2 + \tfrac{1}{2}qLx - \tfrac{1}{6L}qx^3\right] = \frac{dy'}{dx}$$

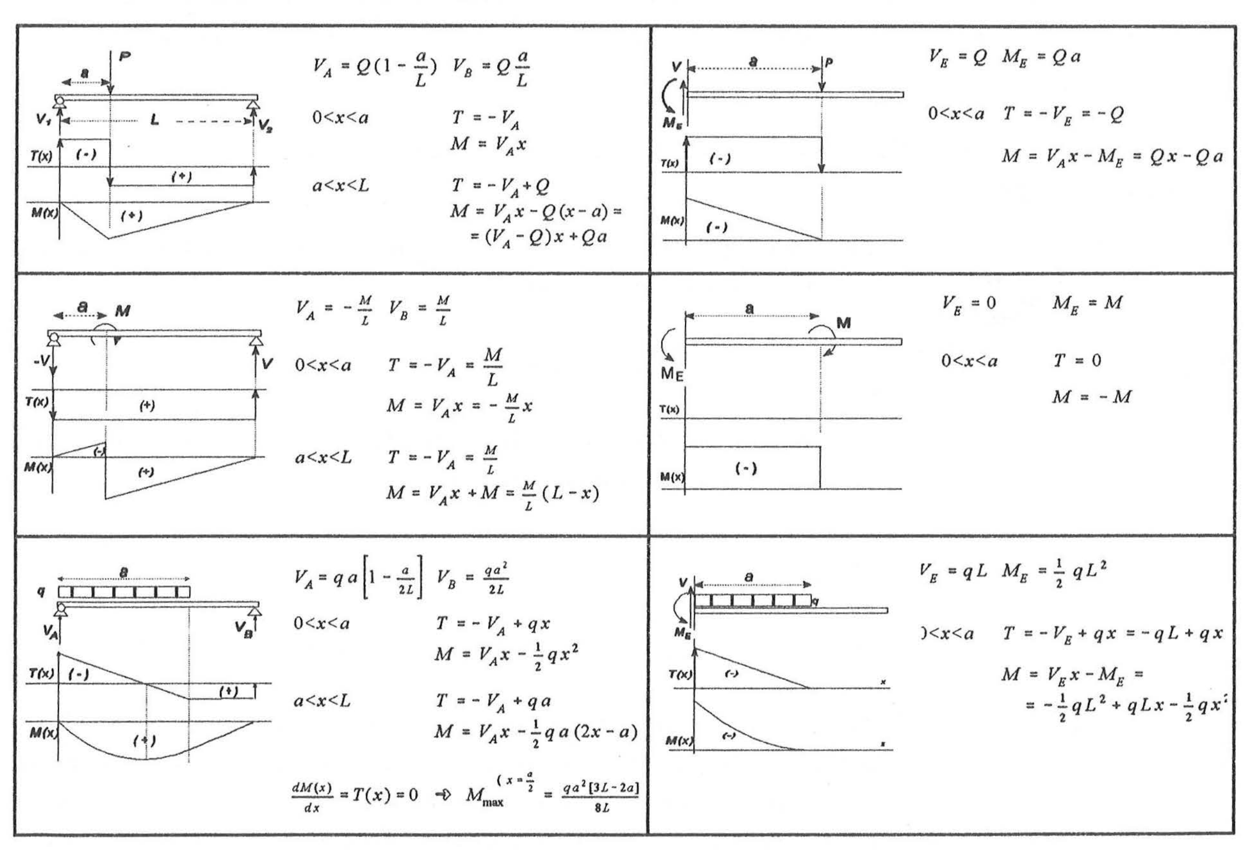
$$y'(x) = \frac{1}{EI}\left[-\tfrac{1}{3}qL^2x + \tfrac{1}{4}qLx^2 - \tfrac{1}{24L}qx^4 + C_1\right] = \frac{dy}{dx} \quad \textit{siendo } C_1 = 0 \textit{ al ser } y' = 0 \textit{ para } x = 0$$

$$y(x) = \frac{1}{EI}\left[-\tfrac{1}{6}qL^3x + \tfrac{1}{12}qLx^3 - \tfrac{1}{120L}qx^5 + C_2\right] \quad \textit{siendo } C_2 = 0 \textit{ al ser } y = 0 \textit{ para } x = 0$$

$$\textit{por tanto } f = y_{max}(x = L) = \frac{1}{EI}\left[-\tfrac{1}{6}qL^4 + \tfrac{1}{12}qL^4 - \tfrac{1}{120}qL^4\right] = -\frac{11\,qL^4}{120\,EI}$$

Es de notar, sin embargo, que la simplificación $M \simeq EIy''$ no sería válida si las curvaturas alcanzadas fuesen considerables ya que el cuadrado de la tangente no sería despreciable y la carga a considerar tendría incluso que hacerse por unidad de arco, no por unidad de abscisa, complicando aún más su resolución.

En cualquier caso, limitando el estudio al sólido rígido e indeformable, a continuación se muestran los diagramas correspondientes a los casos simples de barras isostáticas, pudiéndose obtener los casos complejos por acumulación de esfuerzos debidos a cargas parciales, es decir, sumando o restándose según sean de igual o de signo opuesto los esfuerzos correspondientes a cada una de las cargas aplicadas.



16.2.4 APLICACIÓN DE LOS TRABAJOS VIRTUALES AL ESTUDIO DE LA BARRA.

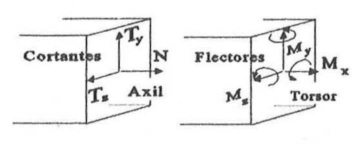


Figura 16.18

Como recordaremos, las fuerzas interiores actuantes sobre una sección plana se podían reducir, tratándose de piezas prismáticas delgadas, a su resultante y momento resultante aplicados en el "mal llamado" c.d.g. de la sección, cuyas proyecciones respectivas sobre la directriz y la sección de la barra determinaban las correspondientes solicitaciones axiles y cortantes, y los momentos a torsión y a flexión.

La deformación de una rebanada se produce pues por la actuación conjunta de 2 momentos y dos fuerzas aplicados en cada cara de la rebanada, por lo que necesitamos conocer previamente la expresión del trabajo virtual que realiza un momento para la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales a partir de la expresión genérica $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, \delta \rho_{ij}$ para sistemas ligeramente deformables.

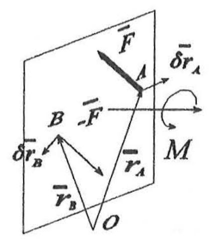


Figura 16.19

Como un momento siempre puede descomponerse en un par de fuerzas equivalente (contenidas en un plano perpendicular a él), el trabajo virtual del momento siempre podrá expresarse como el que realizan ambas fuerzas para un desplazamiento virtual de los puntos de aplicación:

$$\delta \mathscr{E} = \vec{F}\cdot \delta \vec{r}_A + (-\vec{F})\cdot \delta \vec{r}_B = \vec{F}\cdot(\delta \vec{r}_A - \delta \vec{r}_B) = \vec{F}\cdot \delta(\vec{r}_A - \vec{r}_B) = \vec{F}\cdot \delta(\vec{BA})$$

conservando en este caso la notación vectorial al no estar las fuerzas sobre la misma recta de acción.

16.2.4.1 HIPÓTESIS DE SÓLIDO RÍGIDO

Como se trata de un campo equiproyectivo podemos relacionar los desplazamientos virtuales de A y B mediante la expresión $\delta \vec{r}_A = \delta \vec{r}_B + \vec{AB} \times \delta \vec{\varphi}$ de forma que $\delta \vec{r}_A - \delta \vec{r}_B = \vec{AB} \times \delta \vec{\varphi}$ y sustituyendo en la del trabajo quedará:

$$\delta \mathscr{E} = \vec{F}\cdot(\delta \vec{r}_A - \delta \vec{r}_B) = \vec{F}\cdot(\vec{AB} \times \delta\vec{\varphi}) = \vec{F}\cdot(\delta\vec{\varphi} \times \vec{BA}) = \delta\vec{\varphi}\cdot(\vec{BA} \times \vec{F}) = \delta\vec{\varphi}\cdot\vec{M} = M\,\delta\varphi$$

ya que el ángulo girado se considera en el plano perpendicular al momento y, por tanto, el vector variación tendrá la misma dirección y sentido que él.

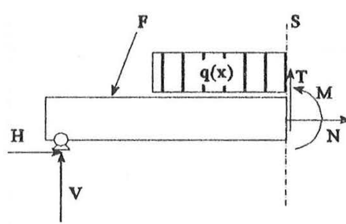


Figura 16.20

Resumiendo, para el sólido rígido e indeformable, el trabajo virtual de las fuerzas y momentos exteriores aplicados será:

$$\delta \mathscr{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \cdot \delta \vec{\varphi}_i = 0$$

donde $\delta\varphi$ es un ejemplo de coordenada generalizada y M de fuerza generalizada ya que no se corresponden con distancias y con fuerzas.

16.2.4.2 HIPÓTESIS DE SÓLIDO LIGERAMENTE DEFORMABLE

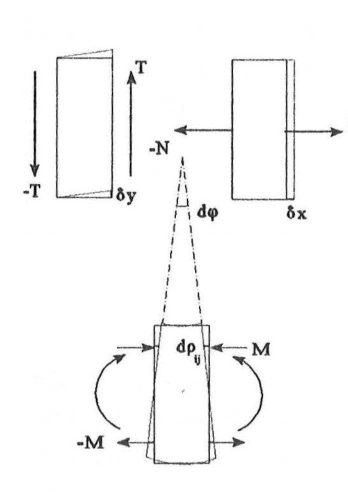


Figura 16.21

Para obtener la expresión total del trabajo producido por las fuerzas interiores $\delta \mathscr{E}_{int} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, \delta \rho_{ij}$ cuando la barra es ligeramente deformable, podemos descomponerla en rebanadas elementales y analizar separadamente las deformaciones producidas por cada uno de los esfuerzos en la rebanada, sumando finalmente el trabajo de los tres esfuerzos a toda la extensión de la barra. Limitándonos a los esfuerzos cortante axil y flector originados por un sistema plano de fuerzas, el trabajo en la rebanada será:

$$\delta \mathscr{E}_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ij}\, \delta \rho_{ij} = N_j \delta x_j + T_j \delta y_j + M_j \delta \varphi_j \qquad [16.23]$$

puesto que consideraremos los $\delta \rho_{ij}$ de la expresión general iguales para todas las fuerzas elementales normales cuya suma nos da la solicitación axil N y análogamente para las tangenciales que proporcionan el cortante T sobre la sección, de forma que se considerarán factor común.

16 BARRAS ARTICULADAS. ENTRAMADOS PLANOS.

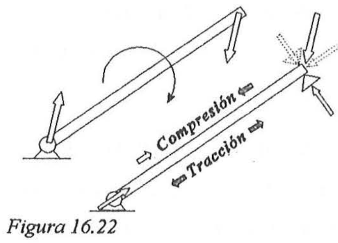
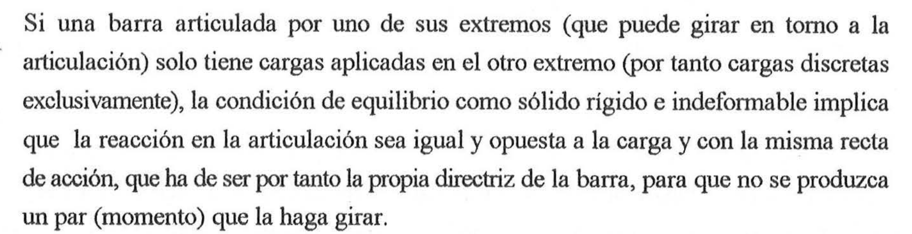


Figura 16.22


Si una barra articulada por uno de sus extremos (que puede girar en torno a la articulación) solo tiene cargas aplicadas en el otro extremo (por tanto cargas discretas exclusivamente), la condición de equilibrio como sólido rígido e indeformable implica que la reacción en la articulación sea igual y opuesta a la carga y con la misma recta de acción, que ha de ser por tanto la propia directriz de la barra, para que no se produzca un par (momento) que la haga girar.

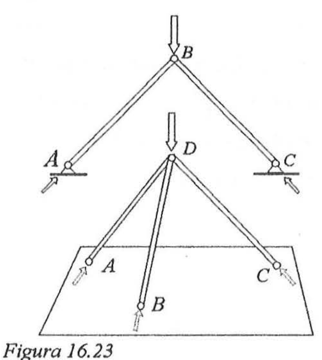
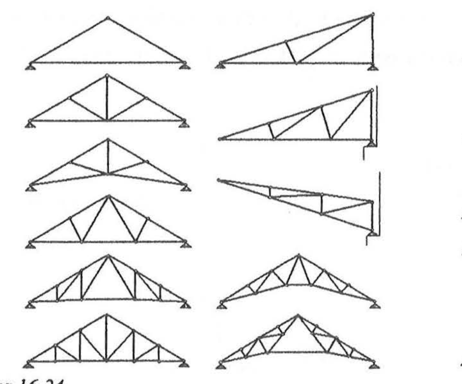
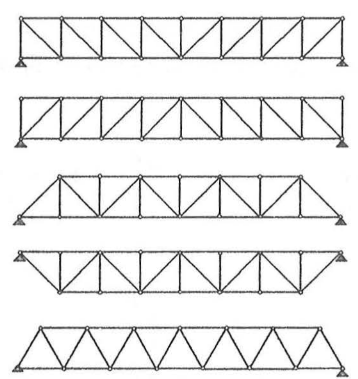
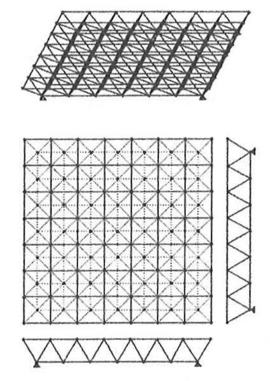


Figura 16.23

Si se anula estrictamente la posibilidad de giro con un apoyo en el extremo opuesto evitando además la aplicación directa de momentos, la barra solo podrá estar sometida a esfuerzos axiles (tracción o compresión). Por tanto, como las articulaciones son los únicos vínculos que impiden toda traslación sin originar momentos de reacción al no oponerse, ni transmitir en su caso, posibles giros, dos barras (para cargas coplanarias) o tres en el espacio, articuladas entre sí y en sus vínculos con el exterior y con las cargas aplicadas en la articulación común, constituyen los mínimos sistemas isostáticos resistentes cuyas barras van a responder al caso anterior; es decir, van a estar sometidas exclusivamente a esfuerzos axiles pero no a cortantes ni a flexión.

Esta característica, que les va a permitir alcanzar una gran esbeltez, constituye precisamente el fundamento de los ENTRAMADOS, entendidos como estructuras resistentes "ligeras", por lo general trianguladas (indeformables), formadas por una serie de barras articuladas entre sí, que, por lo general y en nuestro estudio, serán rectas y contenidas en un mismo plano aunque pueden ser también curvas o formar una estructura espacial (tridimensional), y que representan uno de los tipos más importantes de estructuras empleadas en la construcción, sobretodo en cubiertas de determinada tipología edificatoria, tales como naves industriales, instalaciones deportivas o espacios con grandes luces, así como en obras de ingeniería, puentes, grúas y otras estructuras no perdurables o que requieran gran rapidez de montaje, siendo el acero el material más comúnmente utilizado, pero no el único, en su construcción.




Figura 16.24

El fundamento de las estructuras trianguladas consiste, pues, en la transmisión de las cargas APLICADAS EN LOS NUDOS (articulaciones teóricamente perfectas y sin rozamientos) hasta los vínculos de sustentación exclusivamente a través -y en la dirección- de las barras que las componen, conectadas entre sí mediante ARTICULACIONES a fin de ***no transmitir momentos o cortantes*** que darían lugar a flexión de las barras no diseñadas, por lo general, para resistir a dicha solicitación, salvo la que pueda producirse por su propio peso (que en principio se considerará despreciable frente a las cargas o descompuesto en su equivalente por los extremos) y, en su caso, por el pandeo derivado de esfuerzos considerables a compresión dada su extraordinaria esbeltez. Cuando hayan de aplicarse cargas concentradas entre dos nudos o cuando la estructura deba soportar una carga repartida, como en el caso de un puente de celosía, se deberá disponer un forjado que, mediante el empleo de vigas y correas, transmita las cargas a los nudos de la triangulación.

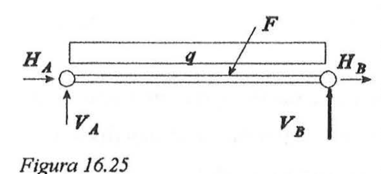


Figura 16.25

El resto de las cargas o bien son comparativamente despreciables o se analizan las barras afectadas por separado, teniendo en cuenta la hiperestaticidad de la barra biarticulada y recurriendo, en consecuencia, a hipótesis de deformación para determinar el sistema equivalente a aplicar en los nudos que se transmitirá con el resto de las cargas hasta los vínculos de sustentación.

En las Mallas o ENTRAMADOS ESPACIALES todas las cargas se reparten a través de sus numerosas barras y de los nudos en múltiples direcciones, constituyendo, por lo general soluciones muy espectaculares por sus grandes luces que las hace idóneas para polideportivos, estadios, recintos feriales, ..., pero de alto grado de hiperestatismo y complejidad, por lo que requieren de cálculo electrónico para su resolución. Por el contrario, en los ENTRAMADOS PLANOS, tanto si se trata de cuchillos triangulares como de cerchas o vigas de celosía, las barras, dispuestas paralelamente a un mismo plano, van a transmitir a los vínculos exclusivamente las componentes de las cargas contenidas en el plano, siendo otros elementos los encargados de transmitir o absorber los empujes transversales, constituyendo un sistema estructural jerarquizado de inmediata resolución, incluso mediante procedimientos gráficos, siempre y cuando se verifique el isostatismo del sistema para no tener que recurrir a hipótesis de deformación.

16.3.1 VÍNCULOS Y GRADOS DE LIBERTAD DE LOS ENTRAMADOS PLANOS

Solo consideraremos para su resolución los entramados planos isostáticos, es decir, ***en equilibrio independientemente del sistema de cargas aplicadas*** sobre ellos, para los cuales el problema se reduce, una vez despejadas las incógnitas de reacción, al cálculo de los esfuerzos axiles en las barras como paso previo a su dimensionado posterior. Esto implica determinar tanto las ***reacciones exteriores*** introducidas por las "***c***" coacciones de los vínculos ante un determinado sistema de cargas, como los ***esfuerzos interiores*** desarrollados en las ***"b"*** barras que constituyen la estructura, o lo que es igual, las ***solicitaciones*** sobre los nudos que la mantienen unida. Es decir, resolver las ***I=b+c*** incógnitas planteadas, contando exclusivamente para ello con las ***E=2n*** ecuaciones de compatibilidad que proporcionan los ***"n"*** nudos de la estructura $\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_Y = 0$.

Para verificar el **ISOSTATISMO** del entramado, como en cualquier sistema material, será ***condición necesaria*** que el número de incógnitas sea igual al de ecuaciones, **I = E**, siendo un hiperestatismo si **I >E** o un Mecanismo si **I <E** y le resta algún grado de libertad:

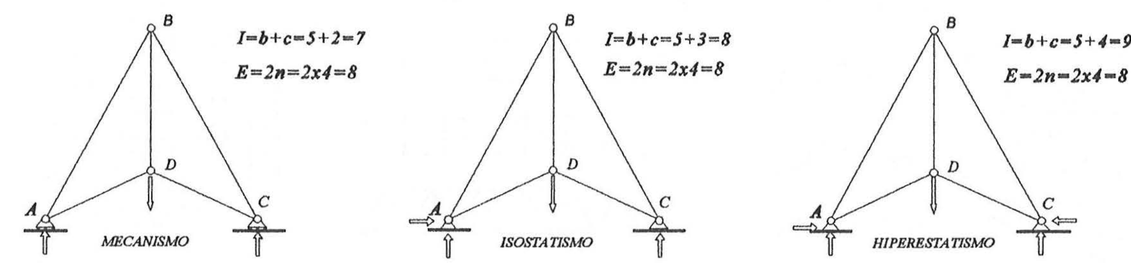
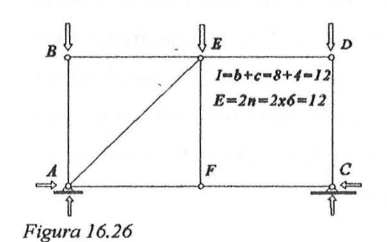
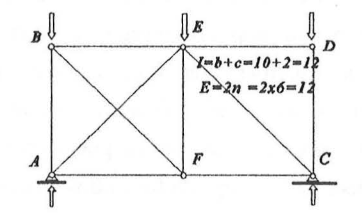


Figura 16.25

aunque puede no ser suficiente si el sistema constituye un mecanismo por vinculación exterior y es hiperestático de constitución y viceversa; o aún siendo isostático por vinculación, estar constituido internamente por partes hiperestáticas y otras con algún grado de libertad.





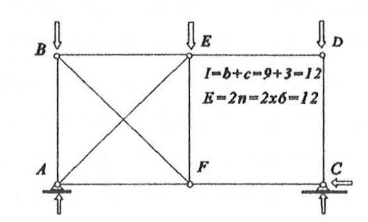


Figura 16.26

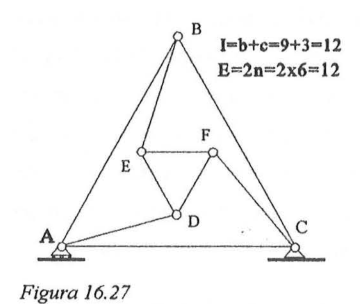


Figura 16.27

En este sentido podemos decir que es ***suficiente*** para que el entramado sea internamente isostático que esté triangulado, ya que cualquier giro implicaría un cambio de longitud y las barras se suponen indeformables. Pero ***no es necesario*** como vemos en el ejemplo compuesto por dos triangulaciones, incluida una en la otra, unidas por sus vértices, en el que no queda ninguna posibilidad de deformación. En definitiva, lo único que podemos afirmar es que el sistema será isostático ***si no le resta ningún grado de libertad*** y proporciona tantas ecuaciones como incógnitas que nos permitan su resolución sin tener que recurrir a hipótesis de deformación.

A partir de aquí y aunque también es importante conocer las reacciones en los vínculos de sustentación para comprobar que lo van a resistir, los objetivos del cálculo serán dos:

- *Obtener la magnitud de los esfuerzos más desfavorables previsibles en las barras, para proceder a su dimensionado en función del material.*
- *Distinguir el signo del esfuerzo; es decir, si va a trabajar a tracción (+) o a compresión (-), dato tanto o más importante que el anterior ante la posible aparición de una inestabilidad adicional en caso de pandeo por compresión debido a su esbeltez.*

No se trata, pues, de calcular la posición o configuración de equilibrio ya que no le quedarán grados de libertad. Lo que se duda es de la consistencia como sólido rígido porque se temen deformaciones de las partes, en particular de las barras, ya que no van a estar calculadas para resistir la deformación ni a cortante ni a flexión.

16.3.2 PROCEDIMIENTOS DE ANÁLISIS. FUNDAMENTOS

El fundamento de cálculo de los esfuerzos axiales, a los que impropiamente se les llamará tensiones "T", propiciando la confusión con los cortantes "T" estudiados para las barras cargadas longitudinalmente, así como el de las reacciones exteriores en los vínculos de sustentación se reduce, como en el sólido rígido e indeformable, al planteamiento de la nulidad sistemática del sistema de fuerzas que actúan sobre la estructura así como el de las fuerzas que actúan sobre todas y cada una de las partes que la componen (barras y nudos), tanto si se utilizan PROCEDIMIENTOS ANALÍTICOS, mediante la resolución de las ecuaciones de equilibrio de la Estática, $\Sigma\ \vec{F}=0$ y $\Sigma\ \vec{M}=0$, como PROCEDIMIENTOS GRÁFICOS por los cuales un sistema de fuerzas (vectores) es nulo si el polígono de fuerzas es cerrado ($\Sigma\ \vec{F}=0$)y el polígono funicular también ($\Sigma\ \vec{M}=0$).

La elección entre unos u otros dependerá de la rapidez y del grado de exactitud que se precise alcanzar ya que los gráficos proporcionan resultados inmediatos aún sin mucho rigor (a mano alzada incluso) a la hora de ofrecer una idea precisa del signo de los esfuerzos, pero también pueden proporcionar valores con un escaso margen de error si se lleva a cabo con herramientas adecuadas de dibujo y más exactos aún si se recurre a programas gráficos de ordenador. Los analíticos por su parte proporcionan una precisión "matemática" en los resultados (aunque no mucho mayor que los últimos) pero exigen la resolución de las 2n ecuaciones que proporcionan los nudos y que, en ocasiones, puede ser abrumadora si no se dispone también de un programa de cálculo para su resolución.

16.3.3 DETERMINACIÓN DE LAS REACCIONES EXTERNAS

Independientemente del método a seguir para la determinación de los esfuerzos en las barras y aunque no siempre vaya a resultar necesario, lo primero a resolver serán las reacciones en los vínculos de sustentación mediante la resolución de las ecuaciones de equilibrio de la Estática, $\Sigma\ \vec{F}=0$ y $\Sigma\ \vec{M}=0$, que, para sistemas planos, se reducen analíticamente a $\Sigma\ F_x=0$, $\Sigma\ F_y=0$, $\Sigma\ M_z=0$, y gráficamente a cerrar el polígono de fuerzas y el polígono funicular.

La resolución gráfica se basa en la transformación del sistema de cargas por otro cualquiera equivalente a base de añadir fuerzas iguales y opuestas con la misma recta de acción (que no modifican el sistema) de forma que las fuerzas resultantes se encuentren en las rectas de acción de las reacciones (si se conocen, como es el caso de los apoyos) o pasen por un punto conocido de ellas (en el caso de las articulaciones éste es el único punto que se conoce a priori) a fin de poder ser equilibradas por aquéllas. En el ejemplo de la figura, como la reacción en el apoyo (sin rozamiento) ha de ser perpendicular al plano (en este caso paralela a la de P) la dirección de la reacción en la articulación viene obligada a tener la misma dirección, encontrándonos ante un sistema de vectores paralelos que resolveremos del siguiente modo:

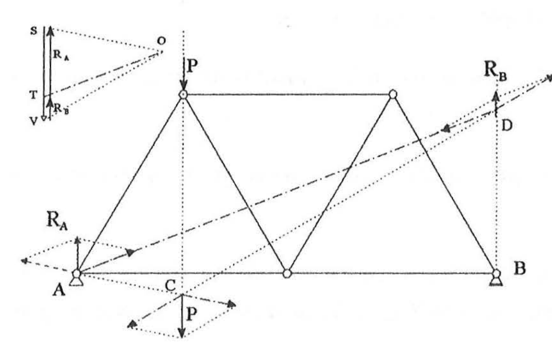


Figura 16.28

Trazamos, a partir de un punto S cualquiera, el vector equipolente $\vec{SV} \equiv \vec{P}$ a una escala gráfica (de fuerzas) arbitraria y con ayuda de un punto O también arbitrario, al que llamaremos Polo, trazaremos los vectores $\vec{S0}$ y $0\vec{V}$ de forma que $\vec{SV} = \vec{S0} + 0\vec{V} = \vec{P}$. Para que en la cercha representada a la escala de longitudes no se altere la acción de las fuerzas actuantes, sustituimos $\vec{P}$ por dichos vectores en un punto C de su recta de acción tal que la paralela por C a $\vec{S0}$ pase por el punto A donde se encuentra el apoyo fijo o articulación. Trazando otra paralela por C a la dirección $0\vec{V}$ obtendremos el punto D de corte con la recta de acción de la resultante en el apoyo B.

La línea de cierre AD del polígono así formado (funicular) ACD nos definirá la dirección de la recta que, trazada a partir de O, nos dará en el "polígono" de fuerzas el punto T que determina, midiendo a la escala de fuerzas elegida, las reacciones en A y B: $\boldsymbol{R_A = TS}$ y $\boldsymbol{R_B = VT}$ de forma que $\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0$.

La simple comparación del polígono funicular y el de fuerzas permite comprobar que las fuerzas que se encuentran en la recta AD son iguales y opuestas, de magnitud 0T, ocurriendo lo mismo con las que se encuentran sobre AC y sobre CD, con lo que P ha quedado equilibrado, efectivamente, tan solo con las fuerzas TS y VT, ya que las otras se anulan, cumpliéndose que $\Sigma\vec{F} = 0;\ \Sigma\vec{M} = 0$

16.3.4 DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS EN LAS BARRAS

Ya sea mediante procedimientos analíticos o gráficos, la diferencia fundamental en los planteamientos para la determinación de los esfuerzos en las barras va a consistir en el método a seguir, pudiéndose plantear el estudio de todas y cada una de las barras a partir del estudio "en cadena" de cada unos de los nudos, MÉTODO DE LOS NUDOS (o de Maxwell-Cremona), o bien plantear solamente, mediante cortes hipotéticos de la estructura, el estudio de unas barras determinadas, MÉTODO DE LAS SECCIONES (o de Ritter) por lo que, más que para el dimensionado posterior, suele utilizarse como una comprobación. Esa diferencia conllevará en que por el ***método de los nudos*** se planteen únicamente "secciones" de *barras concurrentes*, mientras que por el ***método de las secciones*** se elegirán precisamente *barras no concurrentes* para plantear la sección.

16.3.4.1 *MÉTODO DE LOS NUDOS*

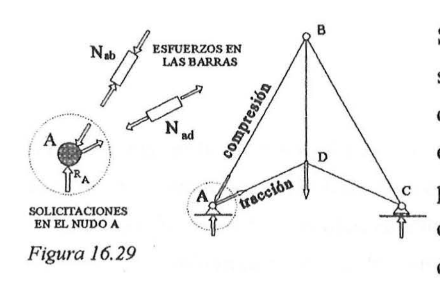


Figura 16.29

Si aislamos un nudo de la estructura practicando una sección hipotética y sustituimos la parte suprimida con su acción equivalente, es decir, lo "cargamos" con las mismas solicitaciones a las que está sometido en aquella, tanto las fuerzas exteriores directamente aplicadas en el nudo como las solicitaciones transmitidas por las barras que concurren en él, al encontrarse en equilibrio tendrán que cumplir (supuesto sólido rígido e indeformable) que $\Sigma\vec{F} = 0$ ya que, al ser concurrentes, cumplirán por sí solas la otra condición $\Sigma\vec{F} = 0;\ \Sigma\vec{M} = 0$.

De este modo, y una vez calculadas las reacciones exteriores como ya se ha indicado, comenzaríamos el estudio por un nudo con al menos una fuerza conocida (exterior o interior) y no más de dos solicitaciones desconocidas ya que solo tenemos dos ecuaciones para su resolución, siendo aconsejable plantearlas inicialmente todas positivas (a tracción) "saliendo" del nudo, de forma que si el resultado es negativo indicará que el sentido correcto de dibujo es hacia el nudo, oprimiéndolo, y en consecuencia la barra estará sometida a compresión.

□ PROCEDIMIENTO ANALÍTICO

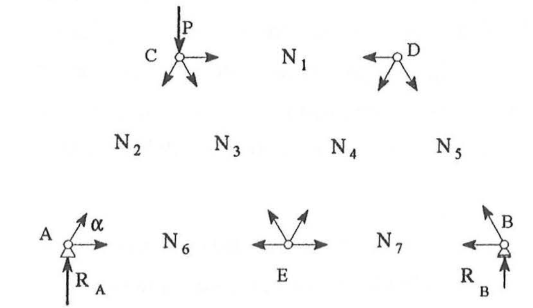


Figura 16.30

En el nudo A de la figura las incógnitas son N_2 y N_6, que se resuelven en función de R_A:

$$\begin{aligned} N_2 \cos\alpha + N_6 &= 0 \\ N_2\, sen\,\alpha + R_A &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad N_2 = -\frac{R_A}{sen\,\alpha} \quad \Rightarrow \quad N_6 = \frac{R_A}{tg\,\alpha}$$

Los valores obtenidos serán pués la solicitación de la estructura SOBRE EL NUDO a través de las barras AC y AE, lo que indica, por el principio de acción y reacción que, la solicitación en las secciones sobre dichas barras en este extremo será igual y de sentido opuesto.

En el ejemplo, como N_2 resulta (-), es decir, de sentido opuesto al dibujado, la barra AC estará sometida a esfuerzos a COMPRESIÓN mientras que la AE, con N_6 positiva y, por tanto el sentido del dibujo, estará sometida a TRACCIÓN. Como las barras transmiten en toda su longitud el mismo esfuerzo, al considerar, por ej. el nudo superior, tendremos ya como dato el empuje de la barra AC sobre dicho nudo, que será igual y opuesto al que acabamos de determinar. Procediendo para cada nudo de forma análoga obtendremos las "tensiones" en todas y cada una de las barras.

□ PROCEDIMIENTO GRÁFICO (de Maxwell-Cremona)

Al ser concurrentes las fuerzas que actúan en cada nudo, cumplen por sí mismas la condición de momento nulo. Por tanto, para imponer la condición de equilibrio de los nudos bastará únicamente con cerrar los respectivos polígonos de fuerzas. Para ello una vez dibujadas, a escala adecuada y una a continuación de otra, las fuerzas conocidas actuantes en cada nudo, tanto exteriores (acción y reacción) como interiores (solicitaciones de las barras que concurren en él ya obtenidas en otros nudos), se trazarían a partir de los extremos abiertos las respectivas paralelas a las direcciones de las solicitaciones desconocidas (no más de 2), cuyas magnitudes quedarán determinadas por la intersección de ambas y el sentido por el de lectura obligado de las demás. Aunque los nudos pueden estudiarse aisladamente, teniendo en cuenta que la solicitación de una barra sobre un nudo es igual y opuesta a la que dicha barra transmite sobre el nudo opuesto, se hacen coincidir los lados de los polígonos correspondientes a los nudos de cada barra, obteniendo así, por el método de Maxwell-Cremona, una "trama" asociada con todas las fuerzas exteriores y los esfuerzos en las barras del entramado.

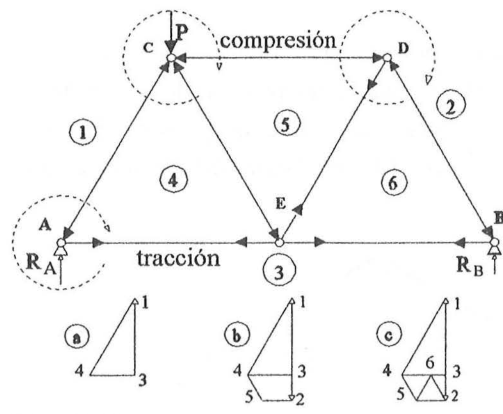


Figura 16.31

Para racionalizar el proceso se adopta un criterio de denominación de fuerzas y solicitaciones basado en las regiones del plano que delimitan, a los que se asigna un número o una letra, comenzando por los exteriores para acabar con los del interior. De este modo, adoptando el mismo sentido de lectura en todos los nudos (por ej. sentido horario), mientras que las fuerzas exteriores tendrán una única lectura (R_A=*31*, P=*12*, R_B=*23*) las interiores (parejas iguales y opuestas) se leerán en función del nudo que se trate de equilibrar. Así, las solicitaciones transmitidas por la barra AC de la figura se leerán *14* cuando estemos con el nudo A y *41* cuando se trate del nudo C.

En este sentido se hará corresponder siempre, en el polígono de fuerzas, el primer número al origen y el segundo al extremo del vector, siendo aconsejable no representar las "flechas" de las solicitaciones en dicho polígono ya que al superponerse siempre dos solo crearían confusión. Dicho sentido ha de quedar reflejado en el dibujo de la estructura y en las proximidades del nudo afectado, deduciéndose posteriormente el signo de las esfuerzos en las barras sabiendo que si las fuerzas que actúan sobre los nudos "***empujan***" los nudos, la barra estará a "***compresión***", mientras que si "***tiran***" de los nudos, la barra trabajará, evidentemente a "***tracción***". Por ejemplo, comenzando siempre por un nudo que tenga al menos una fuerza conocida y "***no más de dos desconocidas***", como el nudo A:

a) trazaríamos, a partir del valor conocido, el polígono de fuerzas aplicadas en el nudo (Fig.16.31a). La lectura en dicho polígono, de las fuerzas de acuerdo con el criterio indicado (31, 14, 43), siempre en sentido horario, nos aclarará el sentido de cada una en dicho esquema. Así, dado que la 31 viene obligada, por ser la reacción en A, a estar dirigida verticalmente y hacia arriba, la 14 leída a continuación habrá de estar orientada en sentido descendente y hacia la izquierda (barra a compresión), mientras que la 43, si ha de cerrar el polígono, deberá leerse horizontalmente y hacia la derecha (barra a tracción).

b) Una vez determinado el módulo y sentido (respecto al nudo) de cada una de las fuerzas transmitidas a través de las barras, el equilibrio de éstas obliga a que las fuerzas actuantes en los nudos situados en los extremos opuestos sean iguales y opuestas a aquellas. Así, sobre el nudo C actuará una fuerza 41 de igual módulo pero sentido contrario a la 14, mientras que sobre el nudo E actuará una fuerza 34 igual y opuesta a la 43 que actuaba en el nudo A.

Repitiendo los pasos a) y b) para todos y cada uno de los nudos de la estructura, obtendremos, finalmente, los esfuerzos a que estarán sometidas las barras ya que, cada esfuerzo, vendrá determinado por el par de fuerzas que actúan en los nudos sobre los que está articulada cada barra.

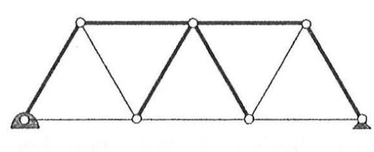
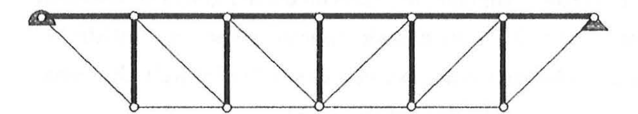


Figura 16.32

Por este método veríamos fácilmente que en la cercha o viga de celosía de diagonales solas (Viga Warren), éstas se alternan a tracción y a compresión en los nudos del cordón inferior, ofreciendo la ventaja de una mayor rigidez al transmitir las cargas por el camino más corto hacia los apoyos pero la desventaja de presentar grandes longitudes de pandeo en las barras del cordón superior en las vigas de mucha altura.

Se obtienen menores longitudes de pandeo con las celosías de diagonales y montantes, formando armaduras "colgadas" (Vigas Pratt) cuando las diagonales trabajan a tracción (tornapuntas) y los montantes a compresión (bielas) o "apoyadas" (Vigas Howe) cuando las diagonales están sometidas a esfuerzos de compresión (jabalcones) y los montantes a tracción (péndolas), siendo las primeras más favorables ante el posible pandeo de las piezas comprimidas.



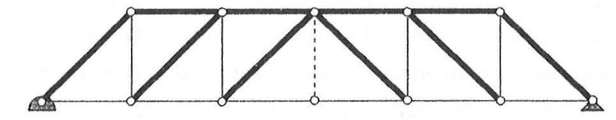
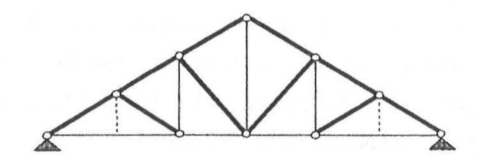


Figura 16.33

En las armaduras o cuchillos triangulares las fuerzas que solicitan las piezas del "alma" se comportan al revés que en las vigas de celosía: si las diagonales descienden hacia el interior estarán sometidas a compresión y los montantes a tracción, mientras que si lo hacen hacia el exterior las diagonales estarán solicitadas a tracción y los montantes a compresión, pudiéndose prescindir de los montantes laterales en las del primer tipo y del central en las del segundo, ya que no van a trabajar como se deduce del equilibrio del nudo inferior.



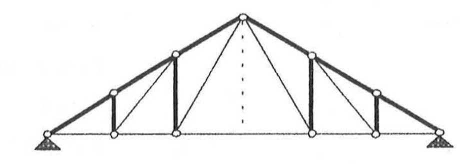
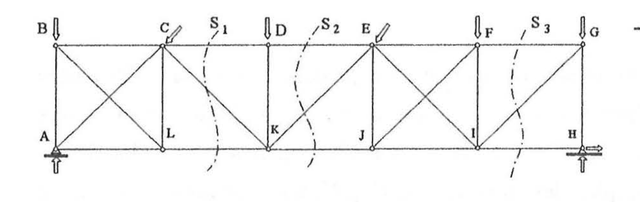


Figura 16.34

16.3.4.2 MÉTODO DE LAS SECCIONES (O DE RITTER)

Se utiliza para determinar los esfuerzos en algunas barras sin necesidad de obtener los de todas las que forman la estructura y en los casos en que no se puede utilizar directamente el anterior. Consiste en equilibrar las fuerzas exteriores actuantes sobre una parte del entramado, resultante de una sección virtual S, con las acciones correspondientes sobre ella de la parte suprimida, que no pueden tener otra recta de acción más que la de las propias barras involucradas en la sección al resistir exclusivamente a solicitación axial.

Partiendo de la hipótesis de indeformabilidad -es decir, ***consistencia de sólido rígido***- que nos permite aceptar como condición necesaria y suficiente para el equilibrio que el sistema de fuerzas sea nulo, las condiciones para su aplicación se dirigen a no plantear más de tres incógnitas -dado que se trata de sistemas planos- para que el problema tenga solución, pudiéndose resumir en:



- *que se conozcan previamente las reacciones exteriores de sustentación lo que implica que se trate de un sistema con vinculación exterior isostática independientemente de que lo sea o no de constitución en alguna de sus partes (que no se podrían determinar pero sí las demás).*

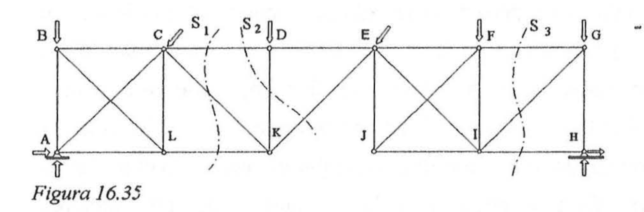
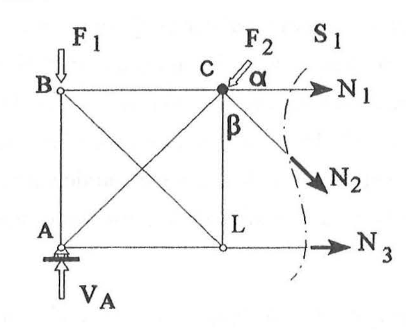


Figura 16.35

- *que la sección no afecte a más de tres barras (no más de tres incógnitas) y que no sean concurrentes las tres en el mismo punto para obtener una única solución ya que, de ser todas concurrentes, conoceríamos la resultante pero obtendríamos infinitas soluciones.*

□ PROCEDIMIENTO ANALÍTICO

1º Se sustituye la parte suprimida por las solitaciones correspondientes sobre las barras cortadas, suponiéndolas hacia fuera a tracción.



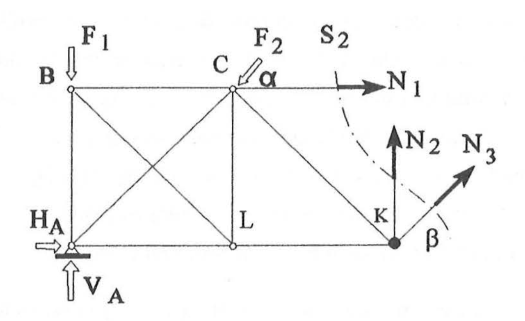


Figura 16.36

2º Se anulan momentos respecto al punto de concurrencia de dos de ellas resolviendo de esta ecuación una solicitación.

$$\Sigma M_C = (F_1 - V_A)BC + N_3 CL = 0 \Rightarrow N_3 = 0 \qquad \Sigma M_K = (F + V_A)AK - (N_1 - F_2 \cos\alpha)CL + F_2 sen\,\alpha KL = 0$$

$$\Sigma F_H = N_1 + N_3 + N_2 sen\,\beta - F\cos\,\alpha = 0 \qquad \Sigma F_H = N_1 + N_3 \cos\beta - F_2 \cos\alpha + H_A = 0$$

$$\Sigma F_V = F_1 + F_2 sen\,\alpha - V + N_2 \cos\,\beta = 0 \qquad \Sigma F_V = F_1 + F_2 sen\,\alpha - N_2 - N_3 sen\,\beta - V_A = 0$$

3º Se resuelven las otras dos, en su caso, por las 2 ecuaciones que anulan las F_x=0 y F_y=0.

4º Una vez conocidas N_1 , N_2 y N_3 , cada una con el signo correspondiente, los valores positivos indicarán esfuerzo a tracción y los negativos a compresión.

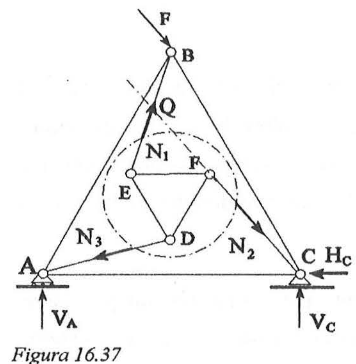


Figura 16.37

Por este método podremos resolver el ejemplo de la figura, imposible de plantear por el de los nudos al no encontrar ninguno con menos de 3 incógnitas, aún no constituyendo un hiperestatismo como vimos en su momento, ya que existe una sección circular que corta 3 barras no concurrentes y nos permite plantear la ecuación de momentos, con una de las solicitaciones como incógnita, en el punto de corte de las otras dos. En tal caso, como al considerar la parte interior en la que no actúan fuerzas exteriores, en la ecuación solo interviene el momento de la solicitación, tendrá que ser nula al no serlo la distancia al punto Q respecto al que se toma momentos y, en consecuencia, también lo serán las otras dos.

□ PROCEDIMIENTO GRÁFICO

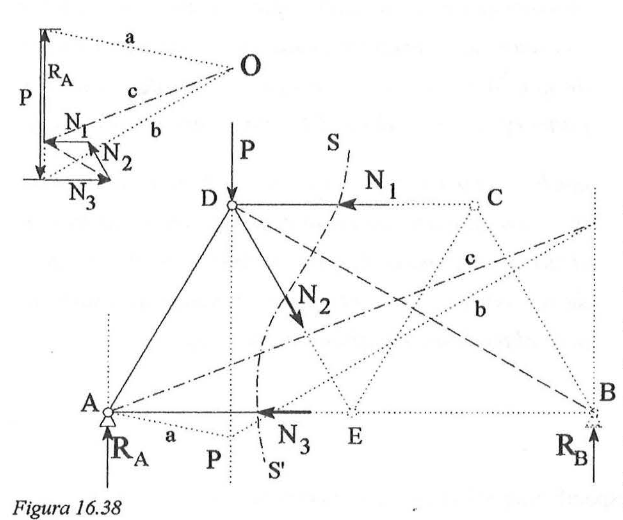


Figura 16.38

Al seccionar la estructura y quedarnos con una de las partes (por ej. la izqda.) las fuerzas que la equilibran las exteriores (P, R_A) son precisamente las solicitaciones sobre las barras implicadas en la sección (N_1, N_2 y N_3) de las que se conoce la dirección pero no el sentido ni la magnitud, por lo que en el polígono de las fuerzas de la parte analizada solo podría indicarse la dirección de dos de ellas a partir de los extremos abiertos, pero no podríamos ubicar la tercera sin saber la magnitud de las otras dos. Sin embargo, cerrando el polígono de fuerzas obtenemos la resultante de los vectores solicitación $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 = -(\vec{P} + \vec{R}_A)$ (que en nuestro ejemplo es precisamente $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 = \vec{R}_B$) y cerrando el funicular obtenemos un punto de su recta de acción (en el ej. la normal al apoyo por B).

Una vez determinada la recta de acción de la resultante de las solicitaciones al cerrar el polígono funicular parcial en la construcción de Cullman, el problema se reduce únicamente a su descomposición en las tres direcciones conocidas de cada solicitación, para lo cual buscamos un punto de concurrencia de aquella con una de las tres direcciones (por ejemplo la de N_3) y trazamos una recta auxiliar desde el punto obtenido hasta la intersección de las otras dos ya que buscamos la concurrencia de tres vectores R_B, N_1+N_2 y N_3 . Trazando en el polígono de fuerzas la paralela a la recta auxiliar obtenida a partir del origen de R_A, su intersección con la paralela a la recta de acción de N_3 nos determina su magnitud y sentido, pudiendo ya determinar también la de las otras dos.

Tanto en uno como en otro método es muy importante establecer el criterio de signos para no confundir los esfuerzos a tracción con los de compresión, por lo que resulta aconsejable suponer inicialmente todas las solicitaciones hacia el exterior de la sección, tanto en el método de los nudos como en el de las secciones, ya que en ambos casos indica que la barra afectada, si la solicitación resultante tiene el mismo signo (el mismo sentido) resulta sometida a esfuerzos a tracción y si sale negativo su valor (o de signo opuesto) estará sometida a esfuerzos de compresión.

16.4 HILOS IDEALES. ECUACIONES DE EQUILIBRIO.

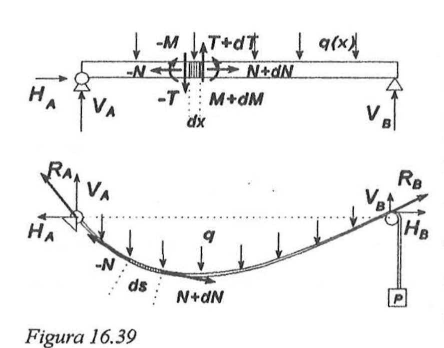


Figura 16.39

Entenderemos por "Hilo" un elemento homogéneo, delgado y alargado (predomina considerablemente una dimensión sobre las otras dos) que no va a presentar en su comportamiento características de sólido rígido e indeformable más que en el sentido de no variar su longitud, resistiendo exclusivamente a esfuerzos de tracción ya que, a diferencia de las barras rígidas, buscará el equilibrio mediante un cambio de forma sin oponer ninguna resistencia ante solicitaciones a flexión (M=0) y, en consecuencia, tampoco estará sometido a esfuerzos cortantes (T=0) ni de compresión pues las solicitaciones correspondientes conducirían a $M \neq 0$ originando inevitablemente la flexión.

Por tanto, consideraremos el hilo ideal totalmente *FLEXIBLE* e *INEXTENSIBLE* a efectos de determinar la ley que seguirá en su deformación o los esfuerzos a tracción, más comúnmente denominados tensiones (de ahí que se le designe inadecuadamente por T en lugar de utilizar la N correspondiente al esfuerzo axial).

16.4.1 CARGAS DISCRETAS

Si el hilo está sometido a un sistema de cargas discretas y el peso propio puede considerarse despreciable frente a ellas, de la ecuación de equilibrio de un elemento ds de hilo, $-\vec{N} + \vec{N} + \Delta\vec{N} + \vec{Q} = \vec{0}$, se deduce fácilmente que:

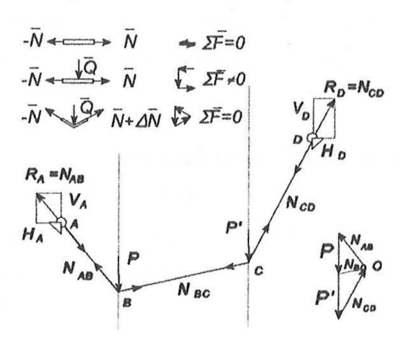


Figura 16.40

a) en el tramo comprendido entre dos fuerzas $\Delta\vec{N} = -\vec{Q} = \vec{0}$ por lo que la tensión en dicho tramo será constante, al igual que la pendiente del segmento rectilíneo que adoptará el hilo en todo el tramo.

b) En los puntos donde están aplicadas las cargas el equilibrio implica un cambio de tensión $\Delta\vec{N} = -\vec{Q}$ y, en consecuencia, un cambio de pendiente de la recta que adopta el hilo antes y después.

c) La forma que adoptará un hilo sometido a un sistema de cargas discretas será una poligonal cuyos lados serán precisamente, para cargas coplanarias, los de uno de los polígonos funiculares que pasan por los puntos extremos de vinculación exterior (anclajes).

Sin embargo, aún siendo de aplicación los procedimientos gráficos para determinar la forma que adoptará el hilo y las tensiones correspondientes a cada tramo, no siempre serán de utilidad al existir infinitos polígonos funiculares que cumplen la condición de pasar por dos puntos dados (siempre y cuando las rectas de acción de las cargas permanezcan invariables ya que ni siquiera podría plantearse en el caso de ir ligadas a la deformación del hilo), debiéndose proceder por tanteos si no se tiene la pendiente de algún tramo como dato y se dispone, por el contrario, de la longitud total del hilo.

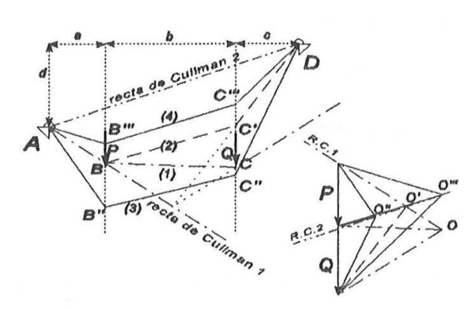


Figura 16.41

En tal caso, comenzaríamos trazando un polígono funicular inicial (1) que pasase por uno de los anclajes (por ej. A) a partir de las direcciones definidas en el polígono de fuerzas desde un polo arbitrario O hasta los extremos de las cargas P y Q y a continuación, *eligiendo como recta de Cullman otra igualmente arbitraria*, por ejemplo el primer lado del polígono funicular obtenido, se obtendría otro polígono (2) *-de los infinitos que pasan por los puntos de anclaje A y D-* obligando al último tramo de éste a pasar por D y por el punto de intersección de CD con la recta de Cullman 1, obteniendo el punto C' de intersección con la recta de acción de Q y cerrando el polígono uniendo C' con B'=B.

Trasladando las nuevas direcciones AB'C'D al polígono de fuerzas nos darían el nuevo polo O' (alineado con O por una paralela a la recta de Cullman anterior), cuyos radios de unión con las cargas P y Q nos proporcionan (a escala de fuerzas) las tensiones generadas en cada tramo del polígono funicular (2).

Si el dato geométrico del que se dispone es la longitud total del hilo L y la suma (a escala de longitudes) de los tramos AB'C'D no se corresponde con dicho valor, se podría obtener el correspondiente a la deformada del hilo mediante aproximaciones sucesivas tomando como nueva recta de Cullman la que pasa por A y D, por lo que quizás sea más conveniente en estos casos la utilización o el apoyo de los procedimientos analíticos.

Si se buscan otras condiciones, como el agotar la capacidad resistente del hilo, se trazaría un polígono de fuerzas con origen O''' en la R.C.2 tal que la mayor de las tensiones fuera el máximo valor y, a partir de él, se obtendría el nuevo polígono funicular (4).

Si lo que se conoce es la pendiente de uno de los tramos, por ejemplo AB'', se trasladaría esa dirección al polígono de fuerzas y su intersección con la R.C.2, O'', nos permitiría resolver el problema como en el caso anterior, obteniendo posteriormente la longitud que el hilo debe desarrollar.

Para la resolución mediante PROCEDIMIENTOS ANALÍTICOS serán de aplicación los mismos métodos utilizados para los entramados, dado que ***una vez alcanzado el equilibrio*** podrían considerarse los tramos entre cargas como barras articuladas a efecto del cálculo de esfuerzos. Por tanto, además de las ecuaciones de equilibrio del sistema, determinaremos las restantes necesarias para resolver todas las incógnitas mediante el MÉTODO DE LOS NUDOS (entendidos ahora como los puntos de aplicación de las cargas) si se trata de calcular las tensiones en todos los tramos, o ***el*** MÉTODO DE LAS SECCIONES, cortando por un tramo entre dos cargas del que se desee obtener exclusivamente la tensión, aunque por cualquiera de los dos se obtiene el resultado sin más problema que el de resolver un sistema de 2n ecuaciones con 2n incógnitas, siendo n el nº de tramos.

En el ejemplo anterior, suponiendo como datos las cargas P y Q, sus rectas de acción (fijas) definidas por a, b, c, la diferencia de cota entre anclajes d y la longitud total del hilo L, las incógnitas a despejar serían las tensiones y pendientes en los tres tramos del hilo ya que las reacciones en los anclajes han de coincidir en valor y dirección con las tensiones en los tramos finales del hilo. En total 6 incógnitas para las que necesitaremos 6 ecuaciones, de las cuales 3 nos proporciona el equilibrio del sistema de fuerzas exteriores:

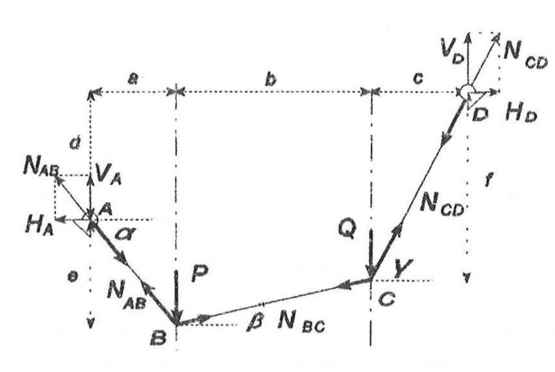


Figura 16.42

bien en la forma:

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; N_{AB}\cos\alpha = N_{CD}\cos\gamma$$
$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; N_{AB}\,sen\,\alpha + N_{CD}\,sen\,\gamma = P + Q$$
$$\Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow\; P\,a + Q\,(a+b) = N_{CD}\,sen\,\gamma\,(a+b+c) - N_{CD}\cos\gamma\,d$$

o su equivalente:

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; H_A = H_D$$
$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; V_A + V_D = P + Q$$
$$\Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow\; P\,a + Q\,(a+b) = V_D\,(a+b+c) - H_D\,d$$

que representan 3 ecuaciones y 4 incógnitas, distintas en cada caso pero relacionadas por las expresiones:

$$N_{AB}\cos\alpha = H_A \qquad N_{AB}\,sen\,\alpha = V_A$$
$$N_{CD}\cos\gamma = H_D \qquad N_{CD}\,sen\,\gamma = V_D$$

Del resto de las ecuaciones necesarias, obtendremos 2(n-1) por el Método de los "nudos" interiores (el último nudo siempre nos da la comprobación con las del exterior pero no aporta más ecuaciones):

$$N_A \cos\alpha = N_B \cos\beta = N_C \cos\gamma$$
$$N_A\, sen\,\alpha + N_B\, sen\,\beta = P$$
$$N_C\, sen\,\gamma - N_B\, sen\,\beta = Q$$

o bien por el Método de las secciones cortando por uno de los tramos no extremos:

$$P\,a = N_{BC}\, sen\,\beta\, a + N_{BC} \cos\beta\, e \qquad siendo \quad e = a\, tg\,\alpha$$
$$H_A = N_{BC}\cos\beta \qquad o \ la \ otra \qquad V_A = P - N_{BC}\, sen\,\beta$$

obteniendo la ecuación que falta de los datos geométricos que tengamos, en el ejemplo la longitud total del hilo L y las distancias entre anclajes y rectas de acción a, b, c:

$$\frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta} + \frac{c}{\cos\gamma} = L$$

16.4.2 CARGAS CONTINUAS

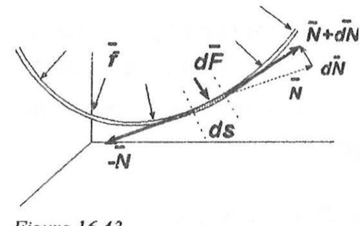


Figura 16.43

Si el hilo está sometido a un sistema de Cargas Continuas $\vec{f}$ (por unidad de longitud), pudiendo ser función de la longitud del hilo f(s) como en el caso de su propio peso (catenaria), o función de alguna de las coordenadas, por ejemplo f(x) en los cables de puentes colgantes (parábola), la fuerza total (diferencial) que actuará sobre un elemento diferencial del hilo ds, será $d\vec{F} = \vec{f}\, ds$ y la Ecuación Vectorial de Equilibrio de dicho elemento, $-\vec{N} + \vec{N} + d\vec{N} + d\vec{F} ds = \vec{0}$, de donde se deduce que $d\vec{N} + \vec{f} ds = \vec{0}$, obteniendo las primeras consecuencias relativas a la variación de tensión dN:

- *que, para carga continua, es también diferencial y del mismo orden que ds.*

- *que es debida al módulo y dirección de la fuerza total actuante sobre el elemento diferencial.*

En cuanto a la dirección de la tensión en cada punto, por corresponder al esfuerzo axial, será normal a la sección del hilo y por tanto tangente a la directriz, pudiéndose expresar, utilizando excepcionalmente la notación extendida T en lugar de la N correspondiente a dichos esfuerzos, como $\vec{T} = T\,\vec{t}$. Ello nos permite plantear la descomposición de la ecuación vectorial de equilibrio del hilo en sus COMPONENTES INTRÍNSECAS según el triedro de Frenet. Derivando $\vec{T} = T\,\vec{t}$ respecto al ds:

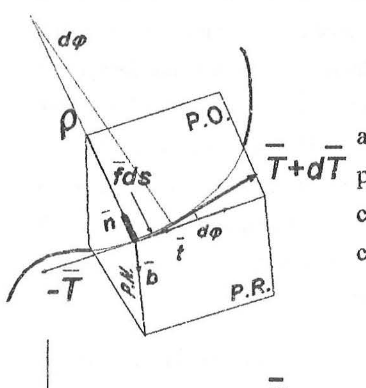


Figura 16.44

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{dT}{ds}\vec{t} + T\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{dT}{ds}\vec{t} + T\frac{\frac{1}{\rho}ds}{ds}\vec{n} = \frac{dT}{ds}\vec{t} + \frac{T}{\rho}\vec{\nu}$$

al desplazarse el extremo del unitario $\vec{t}$ sobre una esfera de radio unidad y dentro del plano osculador, ya que ds solo está contenida en dicho plano. Sustituyendo a continuación en la ecuación de equilibrio $\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{f} = \vec{0}$, expresando la carga en sus tres componentes según la tangente, la normal y la binormal, $\vec{f} = f_t\vec{t} + f_n\vec{n} + f_b\vec{b}$, quedará:

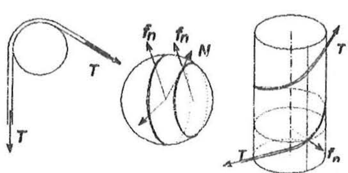
$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{f} = \left[\frac{dT}{ds}\vec{t} + \frac{T}{\rho}\vec{n}\right] + \left[f_t\vec{t} + f_n\vec{n} + f_b\vec{\beta}\right] = \vec{0}$$

y agrupando las componentes homogéneas podremos escribir:

$$\frac{dT}{ds} + f_t = 0 \qquad \frac{T}{\rho} + f_n = 0 \qquad f_b = 0$$

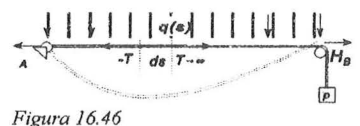
de donde extraeremos las siguientes conclusiones:

- *La variación de la tensión depende exclusivamente de la componente tangencial f_t de la carga por lo que, si ésta es siempre normal al hilo, f_t=0 y, en consecuencia, T=cte.*


Figura 16.45

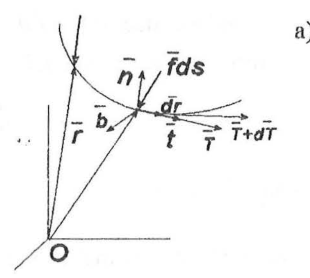
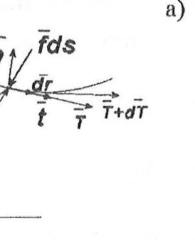
Por ejemplo, un hilo pasante por una polea sin rozamiento y en general todo hilo extendido sobre una superficie sin rozamiento siempre y cuando adopte la forma de una de una línea geodésica de la superficie (coincidentes la normal al hilo y a la superficie) que en el caso de una esfera serán sólo sus círculos máximos y en un cilindro todas las generatrices, directrices y también cualquier línea helicoidal por que de otro modo no estaría en equilibrio.

- *El que el hilo adopte una forma curva depende de f_n siendo el valor de la tensión directamente proporcional al radio de curvatura.*


Figura 16.46

Por tanto, si el radio de curvatura aumenta lo hace también la tensión y, en el límite, cuando $\rho \to \infty$ (hilo recto) la tensión generada por cargas perpendiculares alcanzaría un valor $T \to \infty$ imposible de resistir por ningún material.

- *La última de las ecuaciones nos viene a decir que cuando se somete un hilo a un sistema de cargas, éstas se distribuyen de forma que las tensiones están siempre sobre el plano osculador; o dicho de otro modo, cada elemento diferencial de hilo se deforma en el plano que contiene las cargas, dado que no hay componente de la tensión sobre la binormal y la tensión es tangente al hilo, de donde se deduce que:*



Figura 16.47

a) ***si la fuerza pasa constantemente por un punto fijo O***, tomándolo como origen de coordenadas podremos escribir $\vec{r} \times \vec{f}\,ds = 0$ de forma que, multiplicando la ecuación de equilibrio del hilo $d\vec{T} + \vec{f}\,ds = \vec{0}$ vectorialmente por $\vec{r}$, al anularse el 2º término quedará $\vec{r} \times d\vec{T} = \vec{0}$.

Sustituyendo su valor en $d(\vec{r} \times \vec{T}) = \vec{r} \times d\vec{T} + d\vec{r} \times \vec{T} = \vec{0} + ds\,\vec{t} \times T\vec{t} = \vec{0}$ lo que indica que el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{T} = \vec{c}$ es un vector constante perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{T}$ o, lo que es lo mismo, al plano formado por todo elemento de curva ds y el punto fijo O, en cuyo caso la **CURVA QUE ADOPTARÁ EL HILO SERÁ PLANA.**

Figura 16.48

b) ***Si la fuerza es constantemente paralela a una dirección fija*** $\vec{u}$, podremos escribir $\vec{u} \times \vec{f}\,ds = 0$ así que multiplicando la ecuación de equilibrio del hilo $d\vec{T} + \vec{f}\,ds = \vec{0}$ vectorialmente por $\vec{u}$, al anularse el 2º término quedará, como en el caso anterior, $\vec{u} \times d\vec{T} = \vec{0}$ y análogamente $d(\vec{u} \times \vec{T}) = \vec{u} \times d\vec{T} + d\vec{u} \times \vec{T} = \vec{u} = \vec{r} \times d\vec{T} = \vec{0}$ al no variar el unitario de la dirección fija, lo que indica que el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{T} = \vec{c}$ es un vector constante perpendicular al plano formado por $\vec{u}$ y $\vec{T}$ o, lo que es lo mismo a $d\vec{r}$ y, en consecuencia al elemento de curva ds y a la dirección fija, por lo que la **CURVA QUE ADOPTARÁ EL HILO SERÁ PLANA.**

Esta característica nos permite deducir fácilmente las EXPRESIONES CARTESIANAS de las curvas que adoptarán los Hilos sometidos a cargas continuas exclusivamente verticales y de las tensiones generadas, ya que al ser planas podremos prescindir de uno de los ejes simplificándose los cálculos necesarios para su obtención.

En el caso general se expresaría la ecuación vectorial de equilibrio del hilo $d\vec{T} + \vec{f}\,ds = \vec{0}$ sustituyendo los términos correspondientes por sus expresiones cartesianas: $\vec{T} = T\vec{t} = T\frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = T\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{T}{ds}\,d\vec{r} = \frac{T}{ds}[dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}]$ y $\vec{f} = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$ y agrupando componentes se obtendría el sistema de tres ecuaciones diferenciales:

$$d\left[T\frac{dx}{ds}\right]+f_x ds=0 \qquad \varphi(x\,y\,z)=0$$
$$d\left[T\frac{dy}{ds}\right]+f_y ds=0 \quad \Rightarrow \quad \phi(x\,y\,z)=0 \qquad \textit{Ec. de la curva}$$
$$d\left[T\frac{dz}{ds}\right]+f_z ds=0 \qquad T(x\,y\,z)=T \qquad \textit{Función de la Tensión}$$

cuya resolución mediante integraciones proporciona la ecuación de la curva que adoptará el hilo (curva funicular) y la función de la tensión en función de unas constantes de integración ligadas, por lo general, al valor de la tensión en el punto considerado como inicial, adoptándose en cada caso el más conveniente a fin de conseguir la mayor simplificación. Si, por el contrario, lo que se conoce es la curva que adopta el hilo, el problema será el inverso, derivando, en lugar de integrar, en las ecuaciones generales para comprobar que la carga indicada se adapta a la forma propuesta.

En el caso de curvas planas se prescinde de una de las ecuaciones, con lo que el problema se limita a la resolución de las otras dos:

$$d\left[T\frac{dx}{ds}\right]+f_x ds=0 \qquad \varphi(x\,z)=0 \qquad \textit{Ec. de la curva}$$
$$\Rightarrow$$
$$d\left[T\frac{dz}{ds}\right]+f_z ds=0 \qquad T(x\,z)=T \qquad \textit{Función de la Tensión}$$

aunque en ocasiones pueda plantearse directamente el equilibrio del hilo mediante el sistema equivalente de la carga reducido al correspondiente Eje Central, como si se tratase de un sólido rígido, dado que en el equilibrio puede admitirse que el hilo se comporta como tal. Los casos de mayor interés serán los Hilos sometidos a una carga continua vertical, homogénea y uniformemente repartida.

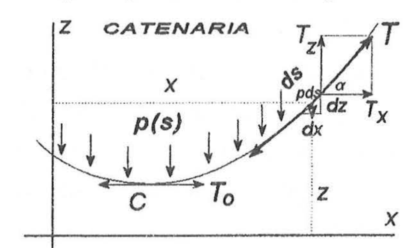


Figura 16.49

Si la carga es el propio peso, supuesto ***uniformemente repartido por unidad de longitud del Hilo***, p(s)=p , la fuerza elemental aplicada sobre un elemento ds del hilo vendrá expresada por la función vectorial $d\vec{F} = -p\,ds\,d\vec{k}$ y la curva funicular que adoptará el hilo, denominada CATENARIA (porque es la que adoptan las cadenas), se obtendrá integrando las expresiones cartesianas que resultan de introducir su valor en la forma:

$$d\left[T\frac{dx}{ds}\right]=0 \qquad T\frac{dx}{ds}=cte=T\cos\alpha=T_x=T_o \quad \textit{tensión en el punto más bajo de la curva}$$
$$\Rightarrow$$
$$d\left[T\frac{dz}{ds}\right]=p\,ds \qquad d\left[T\frac{dz}{dx}\frac{dx}{ds}\right]=d\left[T_o\frac{dz}{dx}\right]=pds=p\sqrt{(dx)^2+(dz)^2}=p\,dx\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \;\Rightarrow\; T_o dz'=pdx\sqrt{1+z'^2}$$

e integrando la segunda ecuación:

$$\Rightarrow \int\frac{dz'}{\sqrt{1+z'^2}}=\int\frac{p}{T_o}dx \;\Rightarrow\; \textit{haciendo el cambio de variable } z'=Sh\,y \;\Rightarrow\; y=\frac{p}{T_o}x+c_1 \;\Rightarrow\; z'=Sh\left[\frac{p}{T_o}x+c_1\right]$$

Para eliminar la constante de integración c_1, teniendo en cuenta que $z'=\frac{dz}{dx}$ representa la pendiente de la curva en cada punto y que en el punto más bajo pasa por un valor nulo, si adoptamos como eje z^o uno paralelo a z pasando por él, la abscisa será $x^o(c) = 0$ y por tanto $c_1 = 0$ quedando:

$$z'=\frac{dz}{dx}=Sh\left[\frac{p}{T_o}x^o\right] \;\Rightarrow\; \int dz=\int Sh\left[\frac{p}{T_o}x^o\right]dx \;\Rightarrow\; z=\frac{T_o}{p}Ch\left[\frac{p}{T_o}x^o\right]+c_2$$

donde nuevamente eliminaremos la constante de integración adoptando como eje x^o uno paralelo a x de forma que el punto más bajo de la curva, C, de abscisa $x^o(c) = 0$, tenga por ordenada $z^o(c)=a=\frac{T_o}{p}$ y así: $c_2 = 0$

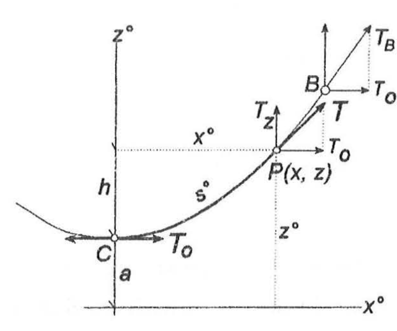


Figura 16.50

Resumiendo, para los ejes especificados la curva z=z(x) adoptada por el hilo en equilibrio sometido a su propio peso se expresará:

$$\boxed{z^o = a\,Ch\,\frac{x^o}{a}} \quad \text{para} \quad a = \frac{T_o}{p}$$

siendo de utilidad también la función s=s(x) que obtendremos partir de ds:

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dz)^2} = dx\sqrt{1+\left[\frac{dz}{dx}\right]^2} = dx\sqrt{1+Sh^2\frac{x}{a}} = Ch\,\frac{x}{a}\,dx \;\Rightarrow\; \boxed{s^o = a\,Sh\,\frac{x^o}{a}}$$

habiendo tomado nuevamente el punto C como origen de referencia donde s°(c)=0 para x°(c)=0, para anular la constante de integración.

A la vista de los resultados se deduce que la relación entre s°(x) y z°(x) es $\boxed{z^2 - s^2 = a^2}$ y $\boxed{z + s = a\,e^{\frac{x}{a}}}$ quedando ya solo obtener la función de tensión T=T(z) y la de su componente vertical T_z=T(z) de forma que:

$$T_o = pa \qquad T_z = \int_0^s p\,ds = ps \qquad y \qquad T = T_o\frac{ds}{dx} = T_o\frac{\sqrt{(dx)^2+(dz)^2}}{dx} = T_o\sqrt{1+\left[\frac{dz}{dx}\right]^2} = T_o\sqrt{1+Sh^2\frac{x}{a}} = T_o\,Ch\,\frac{x}{a} = T_o\frac{z}{a} = pz$$

$$\boxed{T_o = p\,a^2} \qquad \boxed{T_z = p\,as} \qquad \boxed{T = p\,z}$$

En este sentido podemos decir la última expresión era de esperar ya que **EL CAMPO DE FUERZAS DERIVA DE UN POTENCIAL**, pudiendo expresar la carga en la forma $\vec{f} = -\,\vec{grad}\,v$ que, sustituida en la ecuación de equilibrio de los hilos $\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{f} = \vec{0}$ y multiplicando escalarmente por $d\vec{r}$ queda:

$$\frac{d\vec{T}}{ds}\cdot d\vec{r} - \vec{grad}V\cdot d\vec{r} = \frac{d(T\vec{t})}{ds}\cdot d\vec{r} - dV = \frac{dT}{ds}\vec{t}\cdot d\vec{r} + T\frac{d\vec{t}}{ds}\cdot d\vec{r} - dV = \frac{dT}{ds}\vec{t}\cdot ds\,\vec{t} + \frac{T}{\rho}\vec{n}\cdot ds\,\vec{t} - dV = dT - dV = 0$$

es decir, cuando las fuerzas derivan de un potencial $dV = dT \;\Rightarrow\; T = V + C$ la diferencia de tensión entre dos puntos será igual a la diferencia de potencial. Así, en el caso de un hilo homogéneo sometido a su propio peso (p *por ud. de longitud*) en el que la curva adoptará una forma plana como hemos visto, la diferencia de tensiones entre dos puntos A y B valdrá:

Figura 16.51

$$T_B - T_A = V_B - V_A = p\,h_B - p\,h_A = p(h_B - h_A) = p\,h_B - h_A)$$

En este caso hay que tener presente que dT tiene dimensiones de fuerza (solicitación axial) no de "tensión" (*fuerza/ud.superficie*), y tampoco el potencial V las puede tener de trabajo sino de trabajo/ud. longitud (*fuerza*) ya que se deduce de la carga (*fuerza/longitud*) por lo que la ecuación es homogénea.

No es de utilidad, sin embargo, cuando el hilo va a soportar el peso de otro elemento, muy superior en comparación al suyo, transmitido verticalmente por una estructura secundaria (al que denominaremos carga para diferenciarlo del anterior) ya que, aún estando uniformemente repartido, lo está sobre la dirección del eje x no sobre la directriz del hilo, lo que equivale a una mayor carga en los tramos del hilo cuya pendiente es mayor y sería necesario obtener la ley p=p(h).

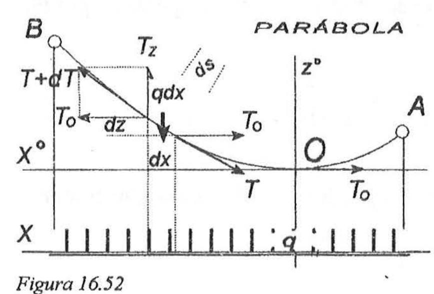


Figura 16.52

En efecto, si la carga es el peso de otro elemento, supuesto ***uniformemente repartido por unidad de longitud del Eje x***, q(x)=q, la fuerza elemental aplicada sobre un elemento ds del hilo vendrá expresada por la función vectorial $d\vec{F} = -q\,dx\,\vec{k}$ y la curva funicular que adoptará el hilo, denominada PARÁBOLA (porque es la ecuación que va a adoptar), se obtendrá -como en el caso anterior- integrando las expresiones cartesianas que resultan de introducir su valor en la ecuación de equilibrio de los hilos:

$$d\left[T\frac{dx}{ds}\right] = 0 \qquad T\frac{dx}{ds} = cte = T\cos\alpha = T_x = T_o \quad \textit{tensión en el punto más bajo de la curva}$$

$$\Rightarrow$$

$$d\left[T\frac{dz}{ds}\right] = q\,dx \qquad d\left[T\frac{dz}{dx}\frac{dx}{ds}\right] = d\left[T_o\frac{dz}{dx}\right] = q\,dx \Rightarrow T_o\,z' = p\,x + c$$

Para eliminar la constante de integración, teniendo en cuenta que $z' = \frac{dz}{dx}$ representa la pendiente de la curva en cada punto y que en el punto más bajo pasa por un valor nulo, adoptamos como eje z° uno paralelo a z pasando por él, la abscisa será x°(c) = 0 y por tanto c = 0 quedando:

$$T_o z' = T_o\frac{dz}{dx} = q\,x \Rightarrow T_o z = \frac{1}{2}q\,x^2 + c' \qquad c' = 0 \quad \textit{tomando } x^o \textit{ por el punto inferior} \Rightarrow z = \frac{q\,x^2}{2\,T_o}$$

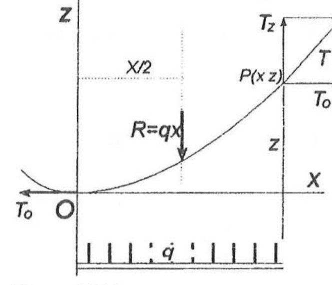


Figura 16.53

Al mismo resultado se llega planteando el equilibrio del sistema equivalente de cargas como si fuera un sólido rígido ya que al ser q=cte se conoce su eje central:

$$\Sigma M_P = R\,\frac{x}{2} - T_o z = q\,x\,\frac{x}{2} - T_o z \Rightarrow q\,x\,\frac{x}{2} = T_o z \Rightarrow z = \frac{q\,x^2}{2\,T_o}$$

obteniéndose los valores de las tensiones en función de la geometría (distancias entre anclajes, diferencia de cotas, ...) para cada caso particular.

16.5 FUNICULARES Y ANTIFUNICULARES. IDEAS SOBRE ARCOS.

Del mismo modo que para cargas discretas la forma que adoptaba el hilo era precisamente la de uno de los infinitos POLÍGONOS FUNICULARES que pasaban por dos puntos dados (anclajes), cuando la carga es continua se puede obtener tambien el "polígono" correspondiente a partir de un polígono de fuerzas elementales qΔs equivalentes a la carga actuante sobre la longitud total del hilo, que en el límite, se convierte en una de las infinitas CURVAS FUNICULARES. Su obtención resulta inmediata en el caso de la parábola pero no tanto para la catenaria, en la que p(s) es constante (para hilos homogéneos y uniformes) pero no así p(x) al depender de la inclinación que va adoptando cada ds, ya que tendríamos que recurrir a cálculos analíticos para determinar la carga q(x) real o proceder mediante aproximaciones, pudiendo observar no obstante que, supuesta una carga equivalente y una misma longitud de hilo, la parábola "desciende" más por el centro (mayor flecha) mientras que la catenaria lo hace por los laterales y la reacción en los extremos alcanza una inclinación mayor (menor componente horizontal).

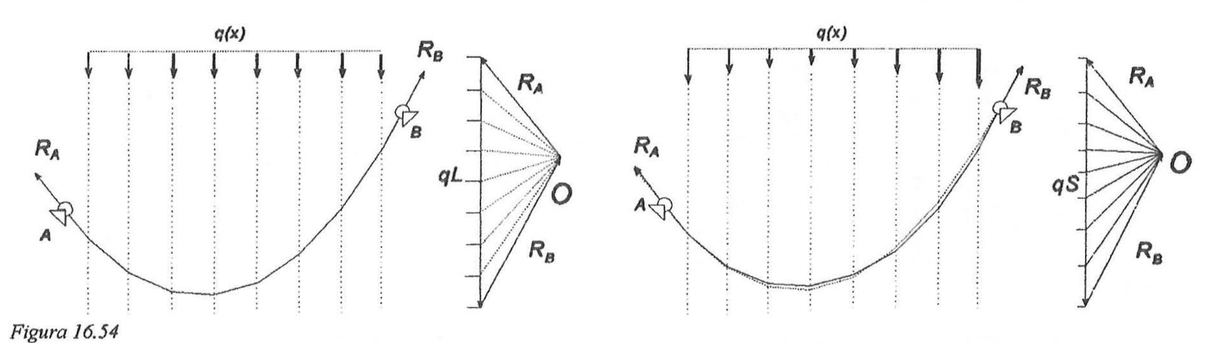


Figura 16.54

Sin embargo una idea aproximada nos puede proporcionar, sobre todo de las tensiones que se pueden generar en los distintos tramos del hilo en función de su longitud, que se leerían directamente, a escala de fuerzas, en el polígono correspondiente trazado por el polo O.

Una de las conclusiones más inmediatas ya la obtuvimos para cargas discretas y es que, si el hilo estuviera totalmente tenso entre los anclajes (***funicular recto***), como las tensiones finales tendrían la misma dirección, en el polígono de fuerzas obligaría a que el polo estuviera en el infinito para poder ser paralelas, lo que indica una tensión infinita imposible de resistir por ningún material. Otra conclusión inmediata sería que un hilo cargado exclusivamente con carga vertical y suspendido por sus extremos no podría adoptar nunca un (***funicular semicircular***) ya que las tensiones en los extremos también serían paralelas como en el caso anterior, pero en la misma dirección que la carga, por lo que el polo tendría que estar situado sobre la propia recta de las fuerzas y no habría funicular.

Si, en el polígono de fuerzas, el polo sigue desplazándose sobre la recta paralela a la que une los anclajes (la que proporciona todos los que pasan por esos dos puntos) comprobaríamos que el polígono (o curva) funicular se invierte, adquiriendo la forma de un arco y que las tensiones en los tramos no son ya a tracción sino a compresión. Los polígonos o curvas así definidos se denominan ANTIFUNICULARES, ya que, obviamente, esas formas no la podría adoptar un hilo, pues no resiste a compresión sin cambiar de forma (flexible) pero sí un entramado de barras articuladas o un arco, entendido como barra rígida de directriz curva, con las limitaciones isostáticas de vinculación vistas para aquellas (triarticulada para ser isostática).

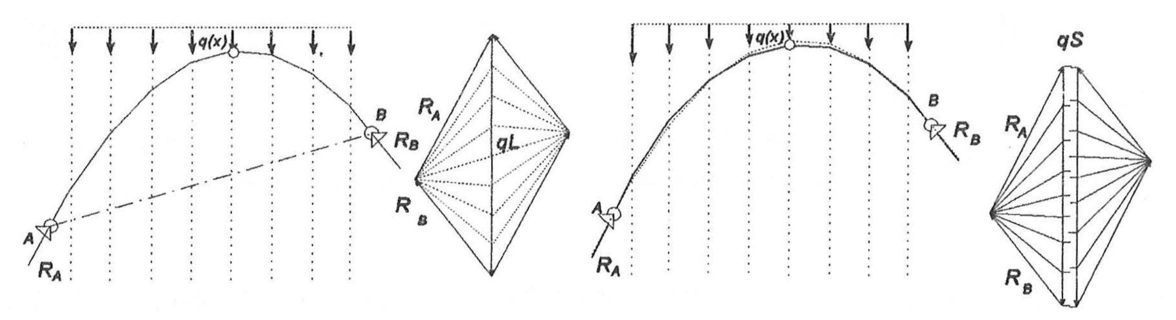


Figura 16.55

El antifunicular para el peso propio que pasa por tres puntos dados (arco triarticulado) denominado línea de presiones, constituye precisamente el punto de partida tradicional en la elección de la forma que se va a dar a un arco (o rebanada de bóveda), ya que la fijación definitiva puede determinarse solamente paso a paso, alternando métodos gráficos y analíticos puesto que la aproximación del dibujo nunca es tan grande como se necesita.

Por lo que respecta a cerchas o armaduras arqueadas, la que posee la forma más favorable desde el punto de vista estático es la de forma parabólica, cuyo arco sigue exactamente el trazado de un polígono funicular para cargas uniformemente repartidas y, como inversión de un cable colgado, proporciona la sección menor posible de cercha en relación a la luz, por lo que son muy apropiadas para cubrir grandes luces, aunque para absorber los considerables empujes horizontales se deban emplear estribos, cables tensores debajo del pavimento o aprovechar los contraempujes que se producen en estructuras colaterales.

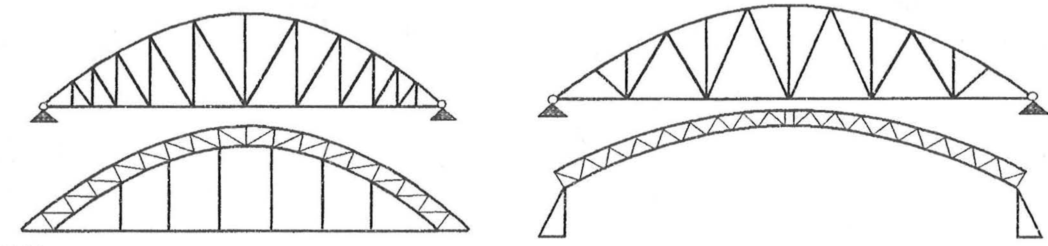


Figura 16.56

Las barras interiores de triangulación, si la carga está uniformemente repartida, teóricamente no deben sufrir solicitación alguna. Únicamente en el caso de que la carga gravite en un solo lado o esté colgada a fajas sufren ligeras solicitaciones longitudinales cuyo signo puede variar, por lo cual sus uniones o enlaces con el arco y con el tirante deben hacerse siempre resistentes a tracción y a compresión, protegiendo además contra los efectos de pandeo de la estructura.

CUADERNO

25.01